

Aufgaben

zur

Differential- und Integralrechnung

nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen.

Von

Dr. H. Dölp,

Lehrer an der Grossherzoglichen technischen Schule zu Darmstadt.

Giessen, 1869.

J. Ricker'sche Buchhandlung.

Vorwort.

Der Wunsch der Herren Professoren Dr. Clebsch und Dr. Gordan zu Gieſsen, ihren Zuhörern für die Uebungen in der Differential- und Integralrechnung eine Aufgabensammlung empfehlen zu können, die sich ihren Vorträgen mehr als die gebräuchlichen accommodire, hat mich zur Bearbeitung dieses Schriftchens veranlaſst. Dabei schien es geboten, neben den Uebungsbeispielen auch diejenigen Theile der Theorie aufzunehmen, bei welchen die Vorträge des Herrn Professors Clebsch von der üblichen Darstellungsweise wesentlich abweichen; unter der Hand haben sich aber gegen die anfängliche Absicht diese einzelnen Theile zu einem vollständigen Grundriſs der beiden Disciplinen erweitert. Kunstgriffe, wie sie in der Integralrechnung nicht selten zur Anwendung kommen, muſsten selbstverständlich hier unberücksichtigt bleiben, und daher sind auch diejenigen Aufgaben nach allgemein gültigen Sätzen behandelt, welche vielleicht durch eine geschickte Transformation etwas kürzer gelöst werden konnten. Die Beispiele sind zum Theil neu gebildet, zum Theil der mir zu Gebot stehenden Literatur entnommen, Formel (21), S. 69 stammt aus Dienger's Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Bei der Aus-

wahl liefs ich mich von der Ansicht leiten, dafs einfache Beispiele viel mehr zu empfehlen seien, als solche, die namentlich ihrer algebraischen Schwierigkeiten wegen die Ausdauer des Uebenden über Gebühr in Anspruch nehmen.

Von den stehen gebliebenen Druckfehlern bitte ich vor dem Gebrauch des Buches die folgenden zu corrigiren:

S. 44, letzte Zeile, setze $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ statt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$

„ 68, Formel (20), setze α_k statt α

„ 86, § 4, setze $dx = \frac{n}{b} z^{n-1} dz$ statt $dx = n z^{n-1} dz$

„ 89 setze $\alpha_2 = -\frac{55}{192}$ statt $= -\frac{55}{92}$

„ 111, Nr. 301, setze $\sin(m - n)x$ statt $\cos(m - n)x$.

Differentialrechnung.

§ 1. Die Differentialquotienten der Funktionen Einer Variablen.

$$y = a\,x^n \qquad \frac{dy}{dx} = n\,a\,x^{n-1} \tag{1}$$

$$y = \frac{a}{x^n} = a\,x^{-n} \qquad „ = -\frac{n\,a}{x^{n+1}} = -n\,a\,x^{-n-1} \tag{2}$$

$$y = a\sqrt[n]{x} = a\,x^{\frac{1}{n}} \qquad „ = \frac{a}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = a \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \tag{3}$$

$$y = a\sqrt[n]{x^p} = a\,x^{\frac{p}{n}} \qquad „ = a \cdot \frac{p}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{p-n}} = a \cdot \frac{p}{n} x^{\frac{p}{n}-1} \tag{4}$$

$$y = e^x \qquad „ = e^x \tag{5}$$

$$y = a^x \qquad „ = a^x \lg a \tag{6}$$

$$y = \lg x \qquad „ = \frac{1}{x} \tag{7}$$

$$y = \sin x \qquad „ = \cos x \tag{8}$$

$$y = \cos x \qquad „ = -\sin x \tag{9}$$

$$y = \operatorname{tg} x \qquad „ = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{10}$$

$$y = \operatorname{cotg} x \qquad „ = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{11}$$

$$y = \operatorname{arc}.\sin x \qquad „ = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{12}$$

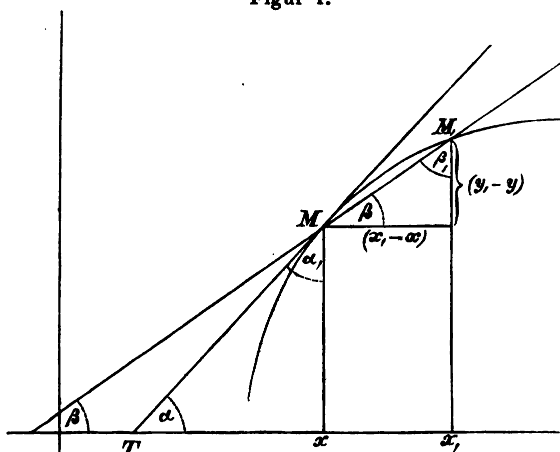
$y = \text{arc} . \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (13)

$y = \text{arc tg } x \qquad „ = \frac{1}{1+x^2}$ (14)

$y = \text{arc} . \text{cotg } x \qquad „ = - \frac{1}{1+x^2}$ (15)

Entwickelung der vorhergehenden Differentialformeln. Wird die explicite Funktion $y = f(x)$ durch AB als Funktionscurve repräsentirt und durch M und M_1 eine Sekante gelegt, so ist $\text{tg } \beta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$. Rückt Punkt M_1 mehr und mehr an M heran, so ändert die Sekante ihre Lage

Figur 1.



und wird zur Tangente MT, wenn M_1 mit M zusammenfällt. Hierbei wird tg β zu tg α und es ist

$$\text{tg } \alpha = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \tag{16}$$

indem wir durch das Zeichen lim andeuten, dafs dieser Quotient unter der Voraussetzung zu bilden sei, dafs $x_1 = x$, also auch $f(x_1) = f(x)$ sei. Diesen eigenthümlichen Quotienten nennen wir den Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$

und bezeichnen ihn durch $\frac{dy}{dx}$. Wie wir sehen, hat dieser D.-Q. die unbestimmte Form $\frac{o}{o}$; doch können wir diese Unbestimmtheit dadurch vermeiden, dafs wir denselben vor dem Uebergang zur Grenze geeignet umformen. Construiren wir also an einen beliebigen Punkt der Funktionscurve eine Tangente, so stellt uns der D.-Q. der Funktion, wenn wir unter x die Abscisse des Berührungspunktes verstehn, die trigonometrische Tangente des Winkels vor, den die geometrische Tangente mit der x-Achse bildet.

Ist $y = a =$ Constante, so ist die Funktionscurve eine zur x-Achse parallele Grade, deren sämmtliche Tangenten mit der Graden zusammenfallen, daher mit der x-Achse den Winkel $= o$ bilden. Daraus folgt: Für

$$y = a = \text{Constante ist } \frac{dy}{dx} = o. \tag{17}$$

In $y = f(x)$ ist x die unabhängige und y die abhängige Veränderliche. Geben wir der nämlichen Funktion die andere Form $x = \varphi(y)$, so ist x die abhängige und y die unabhängige Veränderliche. Wir haben dann $\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{x_1 - x}{y_1 - y}$ und $\frac{dx}{dy} = \lim \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \operatorname{tg} \alpha_1$. Da aber $\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha_1 = 1$, so ist für die nämliche Funktion

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1. \tag{18}$$

Wenn $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$ ist, so ist auch y eine Funktion von x. Wollen wir $\frac{dy}{dx}$ finden, ohne den Werth für z in $y = f(z)$ zu substituiren, so verfahren wir wie folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{y_1 - y}{z_1 - z} \cdot \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdots \tag{19}$$

Beispiel : $y = (a + b x^2)^3 = z^3$, wenn $z = (a + b x^2)$;

$$\frac{dy}{dz} = 3 z^2, \frac{dz}{dx} = 2 b x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 b z^2 x = 6 b x (a + b x^2)^2.$$

Ist $y = u + v + w$ und $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{(u_1 + v_1 + w_1) - (u + v + w)}{x_1 - x}$$

$$= \lim \left(\frac{u_1 - u}{x_1 - x}\right) + \lim \left(\frac{v_1 - v}{x_1 - x}\right) + \lim \left(\frac{w_1 - w}{x_1 - x}\right)$$

$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} \qquad (20)$$

Der D.-Q. einer Summe von Funktionen der nämlichen Veränderlichen ist gleich der Summe der D.-Q. der einzelnen Funktionen.

Ist $y = u . v$ und $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, so ist auch y eine Funktion von x, und es ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{u_1 v_1 - u v}{x_1 - x} = \lim \left[u_1 \left(\frac{v_1 - v}{x_1 - x}\right) + v \left(\frac{u_1 - u}{x_1 - x}\right)\right]$$

$$= u \frac{dv}{dx} + v . \frac{du}{dx}. \qquad (21)$$

Wird $v = w . t$, so wird $\frac{dv}{dx} = w . \frac{dt}{dx} + t \frac{dw}{dx}$, und

für $y = u w t$ ist $\frac{dy}{dx} = u w \frac{dt}{dx} + u t \frac{dw}{dx} + w t \frac{du}{dx} \cdots (22)$

Ein Produkt aus Funktionen der nämlichen Variablen wird differenzirt, indem man der Reihe nach die Differential-Quotienten der einzelnen Factoren mit dem Produkt der übrigen Factoren multiplicirt und die so erhaltenen Produkte addirt.

Beispiel : $y = x^3 . x^4 = u v$; $\frac{du}{dx} = 3 x^2, \frac{dv}{dx} = 4 x^3$,

$\frac{dy}{dx} = x^3 . 4 x^3 + 3 x^2 . x^4 = 7 x^6$, ein Resultat, das man auch aus der einfacheren Form $y = x^7$ erhält.

Ist $y = a\,u$, wenn a eine Constante, so ist $\frac{da}{dx} = o$ und

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{du}{dx} \qquad (23)$$

Ist $y = \frac{u}{v}$ und $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, so ist auch y eine Funktion von x. Aus $u = y\,.\,v$ folgt $\frac{du}{dx} = y\,.\,\frac{dv}{dx} + v\,.\,\frac{dy}{dx}$, und daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - y\,\frac{dv}{dx}}{v}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\,.\,\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{v\,.\,\frac{du}{dx} - u\,.\,\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad (24)$$

Der D.-Q. eines Bruches ist gleich dem D.-Q. des Zählers multiplicirt mit dem Nenner, weniger dem D.-Q. des Nenners multiplicirt mit dem Zähler, das Ganze getheilt durch das Quadrat des Nenners.

Die oben angeführten Sätze über den D.-Q. zusammengesetzter Funktionen sind nur besondere Fälle eines allgemeinen Satzes, den kurz zu entwickeln vielleicht nicht überflüssig sein dürfte.

Wenn $y = f(u\,v\,w)$, und $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$ ist, so ist auch y eine Funktion von x, deren D.-Q. wir finden wie folgt: Geht x über in $x + \Delta x = x_1$, so geht auch übcr u in u_1, v in v_1, w in w_1 und es ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(u_1\,v_1\,w_1) - f(u\,v\,w)}{x_1 - x},$$

Bevor wir in diesem Ausdruck den Grenzübergang ausführen, wandeln wir denselben in den gleichen Ausdruck um:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \left[\frac{f(u_1\,v_1\,w_1) - f(u\,v_1\,w_1)}{x_1 - x} + \frac{f(u\,v_1\,w_1) - f(u\,v\,w_1)}{x_1 - x} + \frac{f(u\,v\,w_1) - f(u\,v\,w)}{x_1 - x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim\left[\frac{f(u_1 v_1 w_1) - f(u v_1 w_1)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{f(u v_1 w_1) - f(u v w_1)}{v_1 - v}\right.$$
$$\left. \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x} + \frac{f(u v w_1) - f(u v w)}{w_1 - w} \cdot \frac{w_1 - w}{x_1 - x}\right]$$

Die Differenz der beiden Ausdrücke $f(u_1 v_1 w_1)$ und $f(u v_1 w_1)$ wird nur dadurch veranlafst, dafs die Variable u in dem ersten geändert als u_1 und dem zweiten ungeändert als u vorkommt, während die Veränderlichen v und w in beiden Ausdrücken ganz gleich vorkommen, nämlich als v_1 und w_1. Bei dem Uebergang zur Grenze spielen daher die Variabelen v und w ganz die Rolle von Constanten und wir erhalten

$$\lim \frac{f(u_1 v_1 w_1) - f(u v_1 w_1)}{u_1 - u} = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Wir nennen diesen D.-Q. $\frac{\partial f}{\partial u}$ den partiellen D.-Q. der Funktion f nach der Veränderlichen u, erhalten ihn, indem wir die Funktion u so differenziren, als ob nur u veränderlich, v und w aber constant wären, und unterscheiden ihn von dem totalen D.-Q. durch ein ∂. Dafs bei dem Grenzübergang $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ zu $\frac{du}{dx}$ wird, bedarf kaum der Erwähnung. Wenden wir das Gesagte auch auf die anderen Theile unseres Ausdruckes an, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}. \quad (25)$$

Leiten wir daraus die früheren Formeln kurz ab:

a) $y = f(u v w) = u + v + w;\ \frac{\partial f}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial f}{\partial v} = 1;\ \frac{\partial f}{\partial w} = 1.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}. \quad \text{(Formel 20)}$$

b) $y = f(u v w) = u \,.\, v \,.\, w;\ \frac{\partial f}{\partial u} = v \,.\, w;\ \frac{\partial f}{\partial v} = u \,.\, w;$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = u \,.\, v;\ \frac{dy}{dx} = v \,.\, w \,.\, \frac{du}{dx} + u \,.\, w \,.\, \frac{dv}{dx} + u \,.\, v \,.\, \frac{dw}{dx}.$$

(Formel 22)

c) $y = \frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$; $\frac{\partial f}{\partial u} = v^{-1}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -u\, v^{-2} = -\frac{u}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(Formel 23)

d) Ist $y = f(u)$ und $u = \varphi(x)$, so ist $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{df}{du}$, weil in der Funktion ja nur die eine Veränderliche u vorkommt.

So ist $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (Formel 19)

Die impliciten Funktionen. Wenn in einer Funktion zwischen x und y die abhängige Veränderliche ganz von der unabhängigen getrennt ist, die Funktion also die Form hat: $y = f(x)$, so nennt man die Funktion eine explicite. Sind dagegen die beiden Variablen noch nicht von einander getrennt, die Funktion also von der Form $f(x\,y) = o$, so bezeichnet man die Funktion als eine implicite. So ist $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ die explicite, $x^2 + y^2 - r^2 = o$ die implicite Form der Kreisgleichung. Um den D.-Q. einer impliciten Funktion zu finden, differenziren wir zunächst $z = f(u\,v)$ unter der Voraussetzung, dafs $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

Es ist $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$. Wird nun $z = o$, also eine Constante, so ist $\frac{dz}{dx} = o$. Wird weiter $u = \varphi(x) = x$, so ist $\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$; und wird $v = y$, so ist $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

Daraus folgt für $f(x\,y) = o$,

$$o = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (26)$$

Mit Hülfe der vorstehenden Lehrsätze können wir ohne Schwierigkeit die Differentialformeln von (1) bis (15) ableiten.

1. $y = a\,x^n$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim a\left(\frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x}\right) = \lim a\,(x_1^{\,n-1} + x_1^{\,n-2}\,x + x_1^{\,n-3}\,x^2$$
$$+ \ldots\ldots x^{n-1}).$$

$$\frac{dy}{dx} = a\,n\,x^{n-1}.$$

2. $y = \frac{a}{x^n} = a\,x^{-n}$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim a\,\frac{\left(\frac{1}{x_1^{\,n}} - \frac{1}{x^n}\right)}{x_1 - x} = \lim \frac{a}{x_1^{\,n}\,x^n}\left(\frac{x^n - x_1^{\,n}}{x_1 - x}\right)$$
$$= \lim - \frac{a}{x_1^{\,n}\,x^n}\left(\frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x}\right) = \lim - \frac{a}{x_1^{\,n}\,x^n}(x_1^{\,n-1} + x_1^{\,n-2}$$
$$x^2 + \ldots\ldots x^{n-1}) = -\,a\,n\,x^{-n-1}.$$

3. $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$$x = y^n;\quad \frac{dx}{dy} = n\,y^{n-1};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n\,.\,y^{n-1}}\,.$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

4. $y = \sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}}$, oder $y^n = x^p$.

Man setze $f(x\,y) = y^n - x^p = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = -\,p\;x^{p-1}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = n\,y^{n-1};\quad \frac{dy}{dx} = -\,\frac{-\,p\,x^{p-1}}{n\,y^{n-1}} = \frac{p}{n}\,.\,\frac{x^{p-1}}{\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{p}{n}\,.\,x^{\frac{p}{n}-1}.$$

5. $y = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots = e^x.$$

6. $y = a^x = (e^m)^x = e^{(m\,x)}$, wenn $a = e^m$, also $m = \lg a$.

Setzt man $m\,x = z$, so ist $y = e^z$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$.

Da aber $\frac{dy}{dz} = e^z$, $\frac{dz}{dx} = m$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = m \,.\, e^z = m \,.\, a^x = a^x \lg a.$$

7. $y = \lg x$.

Da $x = e^y$, so ist $\frac{dx}{dy} = e^y$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.

8. $y = \sin x$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} = \lim \frac{2 \cos\left(\frac{x_1 + x}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1 - x}{2}\right)}{x_1 - x}$$

Gehen wir im letzten Ausdruck zur Grenze über, so können wir in der Grenze $\sin\left(\frac{x_1 - x}{2}\right) = \text{arc}\left(\frac{x_1 - x}{2}\right)$ setzen und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{x + x}{2}\right) = \cos x.$$

Einfacher wird dieser D.-Q. aus der Reihe für sin x abgeleitet.

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2..7}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots\ldots = \cos x$$

9. $y = \cos x = \sin(90^0 - x) = \sin z$, wenn $z = 90^0 - x$

$$\frac{dy}{dz} = \cos z; \quad \frac{dz}{dx} = -1;$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \,.\, \cos z = -\cos(90^0 - x) = -\sin x.$$

10. $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

11. $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

12. $y = \operatorname{arc.} \sin x$, oder $x = \sin y$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y; \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

13. $y = \operatorname{arc.} \cos x$, oder $x = \cos y$.

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

14. $y = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x$, oder $x = \operatorname{tg} y$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}; \ \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

15. $y = \operatorname{arc.} \operatorname{cotg} x$, oder $x = \operatorname{cotg} y$.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

§ 2. Entwickelte algebraische Funktionen einer Veränderlichen.

1. $y = 2 x^3$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 6 x^2$

2. $y = 4 a x^5$ $\qquad$ „ $= 20 a x^4$

3. $y = -\frac{m x^n}{2 n}$ $\qquad$ „ $= -\frac{m}{2} x^{n-1}$

4. $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ $\qquad$ „ $= 1 - x + x^2 - x^3$

5. $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ $\qquad$ „ $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

6. $y = (a + x^2)^3$ $\quad \frac{dy}{dx} = 6\,x\,(a + x^2)^2$

7. $y = (a - b\,x^2)^5$ $\quad$ „ $= -\,10\,b\,x\,(a - b\,x^2)^4$

8. $y = 5\,(a^3 - 4\,x^3)^6$ $\quad$ „ $= -\,360\,x^2\,(a^3 - 4\,x^3)^5$

9. $y = (a + b\,x + c\,x^2 + \ldots.)^n$ $\quad$ „ $= n\,(a + b\,x + c\,x^2 + \ldots.)^{n-1} \cdot (b + 2\,c\,x + \ldots)$

10. $y = (a^2 + x^2)\,(a^2 - x^2)$ $\quad$ „ $= -\,4\,x^3$

11. $y = (1 - 2\,x)\,(1 + 3\,x)$ $\quad$ „ $= 1 - 12\,x$

12. $y = x^4\,(a - 2\,x^3)^2$ $\quad$ „ $= 4\,x^3\,(a - 2\,x^3)\,(a - 5\,x^3)$

13. $y = \frac{1}{x}$ $\quad$ „ $= -\,\frac{1}{x^2}$

14. $y = \frac{a}{x^4}$ $\quad$ „ $= -\,\frac{4\,a}{x^5}$

15. $y = \frac{3\,a^2}{x^2} - \frac{a}{3\,x^4}$ $\quad$ „ $= \frac{4\,a - 18\,a^2\,x^2}{3\,x^5}$

16. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ $\quad$ „ $= -\,\frac{2}{(1 + x)^2}$

17. $y = \frac{a}{(b - x)^n}$ $\quad$ „ $= \frac{a\,n}{(b - x)^{n+1}}$

18. $y = \left(a - \frac{1}{x}\right)^3$ $\quad$ „ $= \frac{3\left(a - \frac{1}{x}\right)^2}{x^2}$

19. $y = \frac{1}{(a^2 + x^2)}$ $\quad$ „ $= -\,\frac{2\,x}{(a^2 + x^2)^2}$

20. $y = \frac{1 - 2\,x^2}{2 - x^2}$ $\quad$ „ $= -\,\frac{6\,x}{(2 - x^2)^2}$

21. $y = \frac{x^2 - 2\,x + 3}{x^2 + 2\,x - 3}$ $\quad$ „ $= \frac{4\,x^2 - 12\,x}{(x^2 + 2\,x - 3)^2}$

22. $y = \frac{(a + x^2)^3}{(b - x^3)^2}$ $\quad$ „ $= \frac{6\,x\,(a + x^2)^2\,(b + a\,x)}{(b - x^3)^3}$

23. $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1 - x)^3}$ $\quad$ „ $= -\,\frac{4}{x^3} + \frac{9}{(1 - x)^4}$

24. $y = \sqrt{x}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

25. $y = \sqrt[n]{x^m}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}$

26. $y = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

27. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ $\qquad$ „ $= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $y = \sqrt{1 - a x^4}$ $\qquad$ „ $= -\frac{2 a x^3}{\sqrt{1 - a x^4}}$

29. $y = \sqrt[n]{(a + b x + c x^2)^m}$ $\qquad$ „ $= \frac{m}{n}(b + 2 c x)$

$\cdot \sqrt[n]{(a + b x + c x^2)^{m-n}}$

30. $y = \sqrt{a - x^3}$ $\qquad$ „ $= -\frac{3 x^2}{2\sqrt{a - x^3}}$

31. $y = \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{(3 a - 2 x)\sqrt{x}}{2\sqrt{(a - x)^3}}$

32. $y = \sqrt[3]{\frac{x^3\sqrt{x}}{m}}$ $\qquad$ „ $= \frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{x}{m^2}}$

33. $y = (a + x)\sqrt{a - x}$ $\qquad$ „ $= \frac{a - 3 x}{2\sqrt{a - x}}$

34. $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$ $\qquad$ „ $= -\frac{a^3}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

35. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 - x^3}}$ $\qquad$ „ $= \frac{2 + 7 x^3}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{(1 - x^3)^3}}$

36. $y = \frac{5 - x}{5\sqrt[3]{5 - x^3}}$ $\qquad$ „ $= \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(5 - x^3)^4}}$

§ 3. Exponential- und logarithmische Funktionen.

37. $y = e^x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = e^x$

38. $y = a^x$ $\qquad$ „ $= a^x \lg a$

39. $y = e^{7x}$ $\qquad$ „ $= 7\, e^{7x}$

40. $y = e^{m x^2 + n}$ $\qquad$ „ $= 2\, m\, x\, e^{m x^2 \mp n}$

41. $y = e^{\sqrt{x^3 - a^3}}$ $\qquad$ „ $= \frac{3\, x^2\, e^{\sqrt{x^3 - a^3}}}{2 \sqrt{x^3 - a^3}}$

42. $y = e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{m} \cdot \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$

43. $y = e^x (x - 1)$ $\qquad$ „ $= x\, e^x$

44. $y = \frac{e^x}{x^n}$ $\qquad$ „ $= \frac{e^x (x - n)}{x^{n+1}}$

45. $y = \frac{x^n}{e^x}$ $\qquad$ „ $= \frac{x^{n-1} (n - x)}{e^x}$

46. $y = \frac{a + b\, x}{e^x}$ $\qquad$ „ $= \frac{b\, (1 - x) - a}{e^x}$

47. $y = (e^{a x} + b)^n$ $\qquad$ „ $= n\, a\, e^{a x} (e^{a x} + b)^{n-1}$

48. $y = a^{b - x}$ $\qquad$ „ $= - a^{b - x} \lg a$

49. $y = a^{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\qquad$ „ $= \frac{x\, a^{\sqrt{x^2 - 1}} \lg a}{\sqrt{x^2 - 1}}$

50. $y = a^{(e^x)}$ $\qquad$ „ $= e^x\, a^{(e^x)} \lg a$

51. $y = x^x$ $\qquad$ „ $= x^x (1 + \lg x)$

Diese und einige folgende Aufgaben sind spezielle Fälle von $y = f(u\, v) = u^v$, indem $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$; $\frac{\partial f}{\partial u} = v\, u^{v-1}$; $\frac{\partial f}{\partial v} = u^v \lg u$; $\frac{dy}{dx} = v\, .\, u^{v-1} .\ \frac{du}{dx} + u^v .\, \lg u\, \frac{dv}{dx}$.

Wird nun $u = \varphi(x) = x$ und $v = \psi(x) = x$, so wird $\frac{du}{dx} = 1$, $\frac{dv}{dx} = 1$ und $\frac{dy}{dx} = x^x (1 + \lg x)$

52. $y = x^{-x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = - x^{-x} (1 + \lg x)$

53. $y = (x^2 - x)^x$ $\frac{dy}{dx} = (x^2 - x)^x \cdot \left[\frac{2x^2 - x}{x^2 - x} + \lg(x^2 - x)\right]$

54. $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ „ $= \left(\frac{a}{x}\right)^x \left[\lg\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right]$

55. $y = \sqrt[x]{x}$ „ $= \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[1 + \lg x\right]$

56. $y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$ „ $= -\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1 - \lg x}{x^2}\right]$

57. $y = \lg x$ „ $= \frac{1}{x}$

58. $y = \lg(a - x)$ „ $= -\frac{1}{a - x}$

59. $y = \lg x^n$ „ $= \frac{n}{x}$

60. $y = \lg(a + b x^2)^n$ „ $= \frac{2 n b x}{a + b x^2}$

61. $y = (\lg x)^n$ „ $= \frac{n \cdot (\lg x)^{n-1}}{x}$

62. $y = \lg(m x)$ „ $= \frac{1}{x}$

63. $y = \lg\left(\frac{1}{x}\right)$ „ $= -\frac{1}{x}$

64. $y = \lg\left(\frac{1}{x}\right)^n$ „ $= -\frac{n}{x}$

65. $y = \lg\frac{a}{a + x}$ „ $= -\frac{1}{a + x}$

66. $y = \lg x + \lg x^2$ „ $= \frac{3}{x}$

67. $y = \lg(x^3 + 2x^2)$ „ $= \frac{3x + 4}{x^2 + 2x}$

68. $y = \lg\left(\frac{a + x^2}{2 b x}\right)$ „ $= \frac{x^2 - a}{x(x^2 + a)}$

69. $y = \lg \frac{a x^2}{\sqrt{(5 - 7 x^2)^3}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{10 + 7 x^2}{(5 - 7 x^2) x}$

70. $y = x^n \lg x - \frac{x^n}{n}$ „ $= n x^{n-1} \lg x$

71. $y = \frac{a^x}{\lg x}$ „ $= \frac{a^x}{(\lg x)^2}\left[\lg x \cdot \lg a - \frac{1}{x}\right]$

72. $y = \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ „ $= - \frac{a}{x \sqrt{a^2 - x^2}}$

73. $y = \lg (1 + \sqrt{1 - x})$ „ $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{(1-x)}}$

74. $y = \frac{a}{\lg \frac{x}{a}}$ „ $= - \frac{a}{x \left(\lg \frac{x}{a}\right)^2}$

75. $y = a^{\lg x}$ „ $= \frac{a^{\lg x} \lg a}{x}$

76. $y = (1 - x) e^{\lg x}$ „ $= e^{\lg x}\left(\frac{1 - 2x}{x}\right)$

77. $y = \lg \sqrt{\frac{a + x}{b + x}}$ „ $= \frac{b - a}{2 (a + x)(b + x)}$

78. $y = \lg \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{a^2 + x^2}}$ „ $= \frac{2 a^2 - x^2}{6 x (a^2 + x^2)}$

79. $y = \lg (x^x)$ „ $= 1 + \lg x$

§ 4. Trigonometrische und cyclometrische Funktionen.

80. $y = \sin n x$ $\frac{dy}{dx} = n \cos n x$

81. $y = (\sin x)^n$ „ $= n (\sin x)^{n-1} \cos x$

82. $y = \sin (x^n)$ „ $= n x^{n-1} \cos (x^n)$

83. $y = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ „ $= - \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$

84. $y = (\sin 5 x)^3$ „ $= \frac{15}{2} \sin 10 x \sin 5 x$

85. $y = [\sin (n x)]^p$ „ $= n p [\sin (n x)]^{p-1} \cos (n x)$

86. $y = a \sin \frac{b}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a\,b}{x^2} \cos \frac{b}{x}$

87. $y = (x \operatorname{tg} x)^2$ $\qquad$ „ $= 2\, x \operatorname{tg} x \left(\frac{\sin 2\,x + 2\,x}{\cos^2 x}\right)$

88. $y = \operatorname{tg} x \lg \operatorname{tg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{1 + \lg \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

89. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{4}{(\sin 2\,x)^2}$

90. $y = \operatorname{cotg} \sqrt{a\,x}$ $\qquad$ „ $= -\frac{a}{2\sqrt{a\,x}\ \sin^2 \sqrt{a\,x}}$

91. $y = e^x \operatorname{cotg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{e^x (\sin\,2\,x - 2)}{2 \sin^2 x}$

92. $y = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ $\qquad$ „ $= 3 \cos 3\,x$

93. $y = \operatorname{tg}^3 (a^2 - x^2)$ $\qquad$ „ $= -\frac{6\,x \operatorname{tg}^2 (a^2 - x^2)}{\cos^2 (a^2 - x^2)}$

94. $y = \frac{1}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^4 x}$ $\qquad$ „ $= \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$

95. $y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$

96. $y = (1 - x^2) \cos 2\,x$
$+ x \sin 2\,x$ $\qquad$ „ $= (2\,x^2 - 1) \sin 2\,x$

97. $y = \frac{3 \sin^2 x - 2}{\cos^3 x}$ $\qquad$ „ $= \frac{3 \sin^3 x}{\cos^4 x}$

98. $y = \frac{a + \sin x}{x^m}$ $\qquad$ „ $= \frac{x \cos x + m\,(a + \sin x)}{x^{m+1}}$

99. $y = \lg \sin x$ $\qquad$ „ $= \operatorname{cotg} x$

100. $y = \lg \cos \left(\frac{x - a}{x}\right)$ $\qquad$ „ $= -\frac{a}{x^2} \operatorname{tg} \left(\frac{x - a}{x}\right)$

101. $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \cos x$ $\qquad$ „ $= \operatorname{cotg} x$

102. $y = 3 \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 \cos x$ $\qquad$ „ $= \frac{\sin 3\,x}{\sin^2 x}$

103. $y = \lg \operatorname{tg} (45^0 + x)$ $\qquad$ „ $= \frac{2}{\cos 2\,x}$

104. $y = e^{a\,x} \cos b\,x$ $\qquad$ „ $= e^{a\,x} (a \cos b\,x - b \sin b\,x)$

105. $y = \text{arc sin } \frac{1}{x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

106. $y = \text{arc sin } \frac{x - a}{b}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{b^2 - (x - a)^2}}$

107. $y = \text{arc cos } \sqrt{1 - x^2}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

108. $y = \text{arc cos } \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$ $\quad$ „ $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \cos x}$

109. $y = a \text{ arc sin } \frac{\sqrt{2 a x - x^2}}{a}$ $\quad$ „ $= \frac{x}{\sqrt{2 a x - x^2}}$

$- \sqrt{2 a x - x^2}$

110. $y = \text{arc sin } \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ $\quad$ „ $= - \frac{2}{1 + x^2}$

111. $y = \text{arc tg } \frac{x}{a - x}$ $\quad$ „ $= \frac{a}{a^2 - 2 a x + 2 x^2}$

112. $y = \text{arc} \left(\text{tg} = 2 \text{ tg } \frac{x}{2}\right)$ $\quad$ „ $= \frac{1}{1 + 3 \sin^2 \frac{x}{2}}$

113. $y = \text{arc} (\cos = \sin x)$ $\quad$ „ $= - 1$

114. $y = \text{arc} (\text{tg} = m \text{ tg } x)$ $\quad$ „ $= \frac{m}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x}$

115. $y = \text{arc} (\text{tg} = \lg \sin x)$ $\quad$ „ $= \frac{\text{cotg } x}{1 + (\lg \sin x)^2}$

116. $y = \text{arc} \left(\text{cotg} = \text{tg } \frac{x}{n}\right)$ $\quad$ „ $= - \frac{1}{n}$

§ 5. Unentwickelte Funktionen zwischen zwei Veränderlichen.

$$f(x\ y) = 0 \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

117. $a x + b y + c = 0$ $\quad \frac{dy}{dx} = - \frac{a}{b}$

118. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y}$

119. $x^n + y^n - a^n = 0$ „ $= - \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$

120. $y^2 - 2 p x = 0$ „ $= \frac{p}{y}$

121. $(x + y) + \sqrt{x + y}$ „ $= - 1$

122. $y^2 (x^2 - 1) - a x^2 = 0$ „ $= \frac{x (a - y^2)}{y (x^2 - 1)}$

123. $(x^2 + y^2)^3 - x^2 y^2 = 0$ „ $= \frac{- x y^2 + 3 x (x^2 + y^2)^2}{x^2 y - 3 y (x^2 + y^2)^2}$

124. $y^2 - 4 a x^3 y + \lg x = 0$ „ $= \frac{12 a x^3 y - 1}{2 x (y - 2 a x^3)}$

125. $e^{x+y} - a^x = 0$ „ $= - \frac{e^{x+y} - a^x \lg a}{e^{x+y}}$

126. $y^2 - \cos \frac{y}{x} = 0$ „ $= \frac{y \sin \frac{y}{x}}{x \sin \frac{y}{x} + 2 x^2 y}$

127. $y \lg x - x \lg y = 0$ „ $= \frac{y (y - x \lg y)}{x (x - y \lg x)}$

128. $(e^x - 1)(e^y - 1) = 0$ „ $= - \frac{e^x (e^y - 1)}{e^y (e^x - 1)}$

129. $a^{x-y} - x^y = 0$ „ $= \frac{a^{x-y} \lg a - y x^{y-1}}{a^{x-y} \lg a + x^y \lg x}$

130. $\sin x - \cos y = 0$ „ $= - 1$

131. $\cos x - x \cos y = 0$ „ $= \frac{\sin x + \cos y}{x \sin y}$

132. $\sin x + \sin y - 2 \sin \left(\frac{x + y}{2}\right) = 0$ „ $= - \frac{\cos \left(\frac{x+y}{2}\right) - \cos x}{\cos \left(\frac{x+y}{2}\right) - \cos y}$

133. $x (1 - b \cos y) - a = 0$ „ $= \frac{b \cos y - 1}{b x \sin y}$

134. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 8axy^2 = o$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + xy^2 - 2ay^2}{y^3 + x^2y - 4axy}$

135. $y(x - \sin x) - 2xy = o$ $\quad$ „ $= -\frac{y(1 + \cos x)}{x + \sin x}$

136. $x \sin(x-y) - (x+y) = o$ $\quad$ „ $= \frac{\sin(x-y) + x\cos(x-y) - 1}{x\cos(x-y) + 1}$

137. $\sqrt{x^2 + y^2} - m \, . \, \mathrm{arc} \, . \, \mathrm{tg} \frac{y}{x}$ $\quad$ „ $= -\frac{x\sqrt{x^2+y^2} + my}{y\sqrt{x^2+y^2} - mx}$

138. $\lg x - \arcsin \frac{x}{y} = o$ $\quad$ „ $= -\frac{y\sqrt{y^2 - x^2} - yx}{x^2}$

139. $xy^x + yx^y - a = o$ $\quad$ „ $= -\frac{y^x + xy^x \lg y + y^2x^{y-1}}{x^2y^{x-1} + x^y + yx^y \lg x}$

§. 6. Funktionen von der Form : $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (27)$$

140. $\begin{array}{l} y = a \sin t \\ x = b \cos t \end{array}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \operatorname{cotg} t$

141. $\begin{array}{l} y = a \sin^2 t \\ x = b \cos^2 t \end{array}$ $\quad$ „ $= -\frac{a}{b}$

142. $\begin{array}{l} y = \sqrt[3]{t} \\ x = \sqrt{t} \end{array}$ $\quad$ „ $= \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$

143. $\begin{array}{l} y = \sin^2 t \\ x = \sin 2t \end{array}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t$

144. $\begin{array}{l} y = e^t \sin t \\ x = e^t \cos t \end{array}$ $\quad$ „ $= \operatorname{tg}(45^0 + t)$

145. $\begin{array}{l} y = \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \\ x = \lg \sin t \end{array}$ $\quad$ „ $= -\frac{\operatorname{cotg} \frac{t}{2}}{\cos t}$

146. $\begin{array}{l} y = a(1 - \cos t) \\ x = a(t - \sin t) \end{array}$ $\quad$ „ $= \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$

147. $x=(a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$ $\quad \frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\left(\frac{r+2a}{2a}\right)t$
$y=(a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$

148. $y = a(2\sin t - \sin 2t)$
$x = a(2\cos t - \cos 2t)$ $\quad$ „ $= \mathrm{tg}\left(\frac{3t}{2}\right)$

149. $y = at$
$x = a(1 - \cos t)$ $\quad$ „ $= \frac{1}{\sin t}$

150. $y = a\sin t\sqrt{2\cos 2t}$
$x = a\cos t\sqrt{2\cos 2t}$ $\quad$ „ $= -\mathrm{cotg}\, 3t$

§ 7. Differentialquotienten höherer Ordnung.

151. $y = a x^n$ $\quad \frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\, a x^{n-4}$

152. $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12x + 10$

153. $y = a(b - cx)^n$ $\quad \frac{d^3y}{dx^3} = -n(n-1)(n-2)\, a c^3 (b-cx)^{n-3}$

154. $y = (a - x^3)^4$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x(a-x^3)^2(11x^3 - 2a)$

155. $y = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad$ „ $= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$

156. $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad$ „ $= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

157. $y = x + \sqrt[3]{(x-a)^5}$ $\quad$ „ $= \frac{10}{9\sqrt[3]{x-a}}$

158. $y = x^2\sqrt{1-x}$ $\quad$ „ $= \frac{15x^2 - 24x + 8}{4\sqrt{(1-x)^3}}$

159. $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ „ $= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

160. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}$ $\quad$ „ $= \frac{4b^2}{9\sqrt[3]{(a+bx)^7}}$

161. $y = \arccos x$ $\quad$ „ $= -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

162. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2ax}{(x^2+a^2)^2}$

163. $y = x^2 \lg x$ $\qquad$ „ $= 3 + 2 \lg x$

164. $y = \frac{\lg x}{x}$ $\qquad$ „ $= \frac{2 \lg x - 3}{x^3}$

165. $y = e^x x^n$ $\qquad$ „ $= e^x x^{n-2}(x^2 + 2nx + n(n-1))$

166. $y = e^{\sin x}$ $\qquad$ „ $= e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$

167. $y = \sin x$ $\qquad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$

168. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1.3.5}{8\sqrt{x^7}}$

169. $y = \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n . \frac{1.2.3\ldots n}{x^{n+1}}$

Für die implicite Funktion $f(x\,y) = o$ ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \tag{28}$$

Diese Gleichung wird aus dem ersten Differentialquotienten (26) abgeleitet, wie folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\frac{\partial f}{\partial y} - \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\frac{\partial f}{\partial y} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Wird für $\frac{dy}{dx}$ der Werth substituirt und dann reducirt, so erhält man Gleichung (28).

170. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$

171. $y^5 - x^2 y + x^3 = 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(6x-2y)(5y^4-x^2)^2 + 4x^2(3x-2y)(5y^4-x^2) + 20x^2y^3(3x-2y)^2}{(5y^4-x^2)^3}$$

172. $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 8xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2y^2 + 2x^2 + a^2); \quad \frac{\partial^2 f}{dy^2} = 12y^2 + 4x^2 + 2a^2.$$

173. $a - y + x^n a^y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = n x^{n-1} a^y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = n(n-1) x^{n-2} a^y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = n x^{n-1} a^y \lg a.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + x^n a^y \lg a; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^n a^y (\lg a)^2.$$

174. $e^{\sin x} - x e^{\sin y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sin x} \cos x - e^{\sin y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = e^{\sin y} \cos y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x e^{\sin y} \cos y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x e^{\sin y}(\sin y - \cos^2 y).$$

175. $y + y e^{-x} - x = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y e^{-x} - 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y e^{-x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -e^{-x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + e^{-x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

176. $y \lg x - \arcsin \frac{x}{y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{(y^2 - x^2)^3}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{x} + \frac{y}{\sqrt{(y^2 - x^2)^3}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lg x + \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x(x^2 - 2y^2)}{y^2\sqrt{(y^2 - x^2)^3}}$$

Für Funktionen von der Form: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \tag{29}$$

Nach (22) ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$, und daraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Wird $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ gesetzt, so wird daraus (24).

177. $y = b \sin t$, $x = a \cos t$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$

178. $y = 1 - \cos t$, $x = t - \sin t$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{4 \sin^4 \frac{t}{2}}$

179. $y = a^t$, $x = \sin t$ $\qquad$ „ $= \frac{a^t \lg a (\sin t + \lg a \cos t)}{\cos^3 t}$

180. $y = p \sin^3 t$, $x = q \cos^3 t$ $\qquad$ „ $= \frac{-p}{3q^2 \sin t \cos^4 t}$

§ 8. Funktionen von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen.

$$z = f(x\,y)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot (dy)^2$$

181. $z = 3x^2 + xy^2 + y^4$ $\qquad dz = (6x + y^2)\,dx + (2xy + 4y^3)\,dy$

182. $z = \frac{xy}{x+y}$ $\qquad dz = \frac{y^2}{(x+y)^2} dx + \frac{x^2}{(x+y)^2} \cdot dy$

183. $z = (2x - 5y^2)^3$ $\qquad dz = (2x - 5y^2)^2(6\,dx - 30y\,dy)$

184. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ $\qquad dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

185. $z = y \sin x + \cos(x - y)$ $\qquad dz = [y \cos x - \sin(x - y)]\,dx + [\sin x + \sin(x - y)]\,dy$

186. $z = \frac{a y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\qquad dz = \frac{a x (x\,dy - y\,dx)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$

187. $z = \arcsin \frac{x}{y}$ $\qquad dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$

188. $z = x^2 - a x y + y^2$ $\qquad d^2z = 2\,dx^2 - 2a\,dx\,dy + 2\,dy^2$

189. $z = x^m \lg y$ $\qquad d^2z = m(m-1)\,x^{m-2} \lg y\,dx^2 + \frac{2 m x^{m-1}}{y}\,dx\,dy - \frac{x^m}{y^2}\,dy^2$

190. $z = x^y$ $\qquad dz = y\,x^{y-1}\,dx + x^y \lg x\,dy$

§ 9. Differentialquotienten von Funktionen complexer Variablen.

Die Veränderliche $z = (x + i y)$, wobei x und y zwei von einander unabhängige Variablen sind und $i = \sqrt{-1}$ ist, wird eine complexe Variable genannt. Diese Variable z kann auch durch die beiden unabhängigen Veränderlichen r und φ ausgedrückt werden, indem man setzt: $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Aus der Gleichung $z = (x + i y) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ leiten wir ab : $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, oder $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, $\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Diese Relationen machen es möglich, Funktionen der Variablen z, in welchen z durch x und y ausgedrückt ist, so zu transformiren, dafs die gegebene Funktion z eine Funktion von r und φ wird, und umgekehrt. Jede Funktion der complexen Variablen z kann in einen reellen und imaginären Theil zerlegt werden, für die einfachen Funktionen geschieht dies durch die nachfolgenden Formeln :

$$w = (x \pm i y)^n = [r^n(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi) \quad (30)$$

$$w = \sqrt[n]{(x \pm i\,y)^m} = [r\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}}$$
$$= r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\varphi \pm i\sin\frac{m}{n}\varphi\right) \qquad (31)$$

$$w = e^{i\,x} = \cos x + i\sin x \qquad (32)$$

$$w = e^{-i\,x} = \cos x - i\sin x \qquad (33)$$

Aus beiden letzten folgt leicht:

$$\sin x = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i},\ \cos x = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2} \qquad (34)$$

$$w = e^{x + i\,y} = e^x\cos y + i\,e^x\sin y \qquad (35)$$

$$w = \sin(x + i\,y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x \qquad (36)$$

$$w = \cos(x + i\,y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x \qquad (37)$$

$$w = \operatorname{tg}(x + i\,y) = \frac{2\sin 2\,x + i\,(e^{2\,y} - e^{-2\,y})}{e^{2\,y} + 2\cos 2\,x + e^{-2\,y}} \qquad (38)$$

$$w = \lg(x + i\,y) = \lg\sqrt{x^2 + y^2} + i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2\,k\,\pi\right) \qquad (39)$$

$$w = \lg\left(\frac{x + i\,y}{x - i\,y}\right) = 2\,i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2\,k\,\pi\right) \qquad (40)$$

Nicht jeder mathematische Ausdruck, der die Variablen x und $(i\,y)$ enthält, kann als eine Funktion von $z = (x + i\,y)$ angesehen werden, wie dies z. B. bei $x^2 + 2\,i\,x\,y + y^2$ der Fall ist, weil es nicht möglich ist, durch mathematische Operationen diesen Werth aus der Variablen $z = x + i\,y$ herzuleiten. Dagegen ist $x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2$ eine Funktion von z, nämlich das Quadrat. Funktionen der complexen Variablen z haben bestimmte characteristische Eigenschaften, die am deutlichsten an den Differentialquotienten dieser Funktionen hervortreten und kurz entwickelt werden sollen.

Da $w = f(x + i\,y)$ eine Funktion von 2 unabhängigen Veränderlichen ist, so ist

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy \qquad (41)$$

Um nun w partiell nach x zu differenziren, setzen wir $(x + i\,y) = z$ und erhalten

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot 1 = \frac{dw}{dz} \tag{42}$$

Eine Funktion der complexen Variablen $z = (x + i\,y)$ wird demnach partiell nach x differenzirt, indem man sie total nach z differenzirt und wieder $z = (x + i\,y)$ setzt. Ebenso finden wir

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot i = i\,\frac{dw}{dz} \tag{43}$$

Aus (42) und (43) folgt die für Funktionen der complexen Variablen characteristische Relation:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x} \tag{44}$$

1. Beispiel: $w = (x + i\,y)^4 = z^4$;

$\frac{dw}{dz} = 4\,z^3$; $\frac{\partial w}{\partial x} = 4\,(x + i\,y)^3$;

$\frac{\partial w}{\partial y} = 4\,z^3 \cdot \frac{\partial\,(x + i\,y)}{\partial y} = 4\,i\,(x + i\,y)^3$.

2. Beispiel: $w = e^{x + i\,y} = e^x \cos y + i\,e^x \sin y$;

$\frac{\partial w}{\partial x} = e^x \cos y + i\,e^x \sin y$;

$\frac{\partial w}{\partial y} = - e^x \sin y + i\,e^x \cos y = i\,(e^x \cos y + i\,e^x \sin y)$.

Aus (41) und (44) folgt nun:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,(dx + i\,dy)$$

Jede Funktion der complexen Variablen kann auf die Form gebracht werden: $w = f\,(x + i\,y) = u + i\,v$. Es ist dann $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}$ und nach (44)

$\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = i\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$, woraus dann weiter:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{45}$$

Diese beidcn Relationen bezeichnen eine andere characteristische Eigenschaft der Funktionen einer complexen Variablen.

1. Beispiel: $w = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = u + iv.$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy;$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy.$

2. Beispiel : $w = \lg(x + iy) = \frac{1}{2}\lg(x^2 + y^2)$

$+ i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2k\pi\right) = u + iv.$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$

Aus (45) folgt $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},$ und daraus :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (46)$$

Auch diese beiden Relationen müssen durch Funktionen einer complexen Variablen befriedigt werden.

Beispiel : $w = \sin(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x$

$+ i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x = u + iv.$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x;$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x.$

Die folgenden Beispiele zu differenziren.

191. $w = \sqrt{x + iy}$ $\qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+iy}}$

192. $w = \sin^2(x + iy)$ $\qquad$ „ $= \sin 2(x + iy)$

193. $w = (x + iy)^n$ $\qquad$ „ $= n(x + iy)^{n-1}$

194. $w = e^{\sin(x+iy)}$ $\qquad$ „ $= e^{\sin(x+iy)}\cos(x + iy)$

195. $w = tg^2 (x + i y)$ $\qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2 \, tg (x + i y)}{\cos^2 (x + i y)}$

196. $w = \arc \sin (x + i y)$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{1 - (x + i y)^2}}$

§ 10. Werthbestimmung von Bruchfunktionen, die für besondere Werthe der Variablen die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annehmen.

Ist $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, und $f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$ oder $= \frac{\infty}{\infty}$, so finden wir den Werth dieses Bruches nach der Formel:

$$f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \tag{47}$$

Um diese Formel abzuleiten, setzen wir, wenn $f(a) = \frac{0}{0}$ ist:

$$f(a + \delta) = \left[\frac{\varphi(x + \delta)}{\psi(x + \delta)}\right]_{x=a} = \left[\frac{\varphi(x + \delta) - \varphi(x)}{\psi(x + \delta) - \psi(x)}\right]_{x=a}$$

Die letzte Form ist zulässig, weil nach der Voraussetzung $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ ist. Nun ist

$$f(a) = \lim \left[\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\psi(x+\delta) - \psi(x)}\right]_{x=a} = \lim \left[\frac{\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{(x+\delta) - x}}{\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{(x+\delta) - x}}\right]_{x=a}$$

$$f(a) = \left[\frac{\frac{d\varphi(x)}{dx}}{\frac{d\psi(x)}{dx}}\right]_{x=a} = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

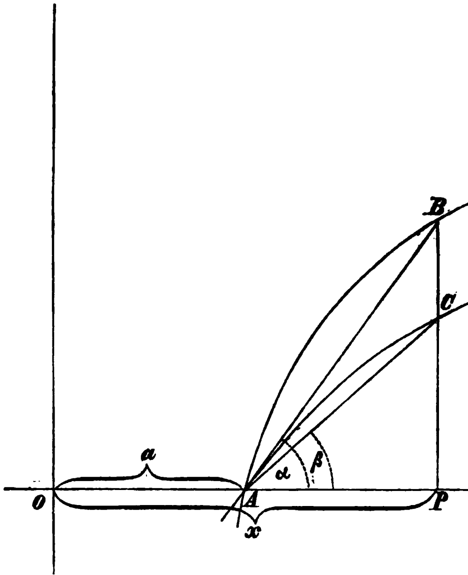
Wird $f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \frac{\infty}{\infty}$, so ist $f(a) = \left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$

$$f(a) = \left[\frac{\frac{\psi'(x)}{(\psi(x))^2}}{\frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}}\right]_{x=a} = \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2\right]_{x=a}$$

$$= \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} \cdot [f(a)]^2$$

$$f(a) = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

Figur 2.



Die Formel (47) läſst eine sehr einfache geometrische Ableitung zu.

Ist AB die Funktionscurve des Zählers $u = \varphi(x)$, AC die des Nenners $v = \psi(x)$, und ist $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$, so müssen sich die beiden Curven in dem Punkte A der x-Achse schneiden. Für die Abscisse $OP = x$ ist $BP = \varphi(x) = u$, $CP = \psi(x) = v$ und $\frac{u}{v} = \frac{BP}{CP} = \frac{(x-a)\operatorname{tg}\alpha}{(x-a)\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Für den Punkt A werden die verlängerten Sehnen AB und AC zu Tangenten, $\operatorname{tg}\alpha$ zu $[\varphi'(x)]_{x=a}$, $\operatorname{tg}\beta$ zu $[\psi'(x)]_{x=a}$ und damit

$$\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]'_{x=a} = \frac{0}{0} = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a}$$

	Gegebene Funktion.	Werth von x, für den die Fkt. unbestimmt wird.	Werth der Funktion.
197.	$\frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$	$x = a$	$\frac{n}{m} a^{n-m}$
198.	$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x - 8}{x^4 - 8x^2 + 12}$	$\pm\sqrt{2}$	$\frac{-4 \mp \sqrt{2}}{4}$
199.	$\frac{12x^5 - 72x^4 + 148x^3 - 120x^2 + 48x - 32}{6x^4 - 35x^3 + 66x^2 - 36x - 8}$	$x = 2$	4
200.	$\frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$	7	$-\frac{1}{56}$
201.	$\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$	3	$\frac{8}{69}$
202.	$\frac{a - \sqrt[5]{(2x^5 - a^5)}}{\sqrt[3]{(x^3 - a^3)}}$	a	o
203.	$\frac{x - (n+1)x^{n+1} + n x^{n+2}}{(1 - x)^2}$	1	$\frac{n(n+1)}{2}$
204.	$\frac{a^x - 1}{x}$	o	lg a
205.	$\frac{\lg x}{\sqrt{x^2 - 1}}$	1	o
206.	$\frac{\lg (x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$	2	$\frac{4}{7}$
207.	$\frac{x \cos x}{x - \sin x}$	o	∞
208.	$\frac{\sin x}{\sin 2x}$	π	$-\frac{1}{2}$
209.	$\frac{2 \sin x - 1}{\cos 3x}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

	Gegebene Funktion.	Werth von x, für den die Fkt. unbestimmt wird.	Werth der Funktion.
210.	$\frac{2\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{cotg}\, x - 1}{2 \sin^2 x - \cos^2 x - \frac{1}{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{10}{3}$
211.	$\frac{\arcsin (2 - x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$	2	o
212.	$\frac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{\sin^3 x}$	o	$\frac{1}{2}$
213.	$\frac{\lg \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	a	$\frac{1}{a}$
214.	$\frac{\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	a	$\frac{1}{a}$
215.	$\frac{\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 3}{\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 3}$	arc tg 3	2
216.	$\frac{1}{\lg x} - \frac{1}{(x - 1)}$	1	$\frac{1}{2}$

§ 11. Die gröfsten und kleinsten Werthe gegebener Funktionen (Maxima und Minima).

a) Entwickelte Funktionen einer Variablen.

Verfolgen wir von einer beliebigen Stelle an den weiteren Verlauf der Funktionscurve $y = f(x)$, indem wir x continuirlich wachsen lassen, so unterscheiden wir folgende Möglichkeiten :

1. Mit wachsendem x nimmt y beständig zu, und die Curve steigt fortwährend, ohne dabei die Art ihrer Krümmung zu ändern. (Geht man einer Curve entlang, so ist sie

auf der einen Seite concav, auf der anderen convex; so lange sie auf der nämlichen Seite concav, auf der anderen convex bleibt, sagt man, sie habe die Art ihrer Krümmung nicht geändert.)

2. Mit wachsendem x nimmt y ohne Aufhören ab; die Curve fällt beständig, ohne die Art ihrer Krümmung zu ändern.

3. Mit wachsendem x nimmt y zu, wird für $x = a$ zu einem Maximum und nimmt bei noch weiter wachsendem x wieder ab. Die Curve (Fig. 3a) steigt anfangs, erreicht in M ihren höchsten Punkt und fällt dann wieder. Soll also $y = f(a)$ ein Maximalwerth sein, so mufs sowohl $f(a - \delta) < f(a)$, als auch $f(a + \delta) < f(a)$ sein.

4. Mit wachsendem x nimmt y beständig ab, bis es für $x = a$ zu einem Minimum wird und bei noch weiter wachsendem x wieder wächst. Die Curve (Fig. 4a) fällt anfangs bis M, erreicht in M ihren tiefsten Punkt und steigt dann wieder. Hiernach ist $y = f(a)$ ein Minimum, wenn $f(a) < f(a - \delta)$ und $f(a) < f(a + \delta)$ ist.

5. Die Curve steigt mit wachsendem x bis zu einem gewissen Punkt M (Fig. 5a), ändert in M die Art ihrer Krümmung und steigt mit wachsendem x immer weiter.

6. Die Curve fällt bis zu einem gewissen Punkt M (Fig. 6a), ändert in M die Art ihrer Krümmung und fällt bei wachsendem x noch weiter.

Dieser besondere Punkt M in Fig. 5a und Fig. 6a wird Wende- oder Inflexionspunkt genannt.

Der unter 1. und 2. beschriebene Lauf der Curve hat hier kein besonderes Interesse. Dagegen haben die Funktionscurven in den Fällen 3. bis 6. eine gemeinschaftliche characteristische Eigenschaft, die darin besteht, dafs die durch M gelegten Tangenten bei den 4 Curven parallel zur x-Achse sind. Um uns von der Wahrheit dieser Behauptung zu überzeugen, untersuchen wir die Richtung der Tangente vor und nach dem Punkte M, also in $M_{,}$ und $M_{,,}$ und beginnen mit

Fig. 3 a.

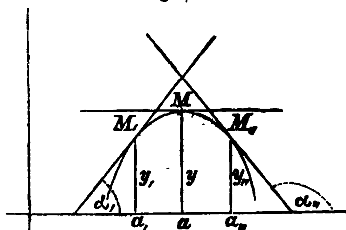


Fig. 4 a.

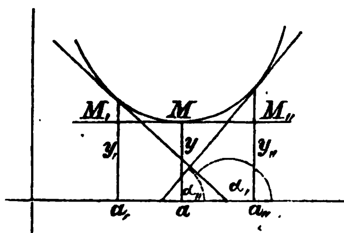


Fig. 3 b.

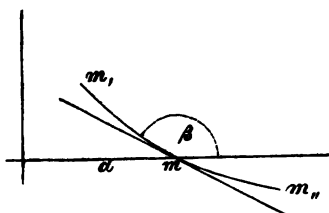


Fig. 4 b.

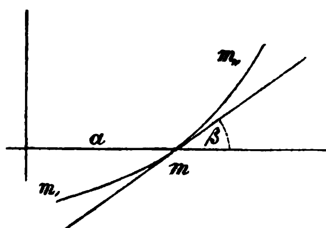


Fig. 5 a.

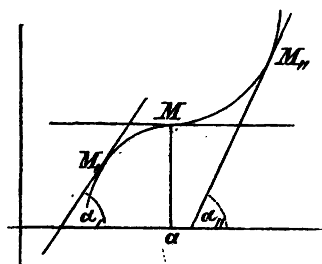


Fig. 6 a.

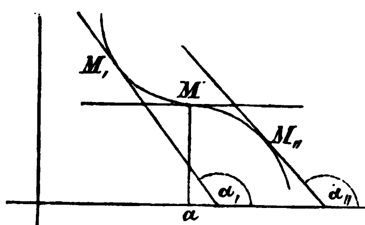


Fig. 5 b.

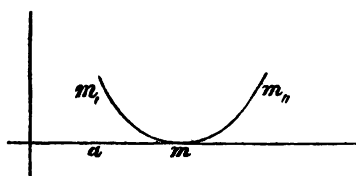


Fig. 6 b.

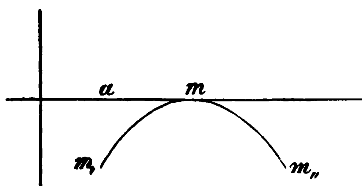


Fig. 3a. Den Richtungswinkel der Tangente bezeichnen wir immer mit α. In M, ist $\alpha < 90^0$, von M, bis M nimmt α ab, wird aber gröſser als 90^0, sobald M überschritten ist, und daraus folgern wir, daſs in M $\alpha = o$ und die Tangente zur x-Achse parallel ist. In Fig. 4a ist für M, $\alpha > 90^0$, von M, nach M nimmt α stetig zu und wird kleiner als 90^0, sobald M überschritten ist. Wir folgern daraus, daſs in M $\alpha = 180^0$ und die Tangente parallel zur x-Achse ist. In Fig. 5a und 6a kann die Curve ihre Krümmungsart in M nur dadurch ändern, daſs sie in M einen Augenblick zur x-Achse parallel läuft. Die Tangente in M ist aber nichts weiter als das verlängerte parallel zur x-Achse gelegene Curvenelement. Da wir diese Eigenthümlichkeit später einer eingehenderen Betrachtung zu unterziehen gedenken, so heben wir hier nur für die Maximal- und Minimalpunkte die Eigenthümlichkeit hervor, daſs in diesen Punkten die Tangente an die Funktionscurve parallel zur x-Achse ist. Wollen wir diese Eigenschaft auf die Funktion selbst übertragen, so haben wir nur zu berücksichtigen, daſs für den Punkt $x = a$, $tg\, a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = a}$ ist. Der Satz heiſst:

Diejenigen Werthe von x, welche $y = f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, müssen der Gleichung genügen

$$\frac{dy}{dx} = o \qquad (48)$$

Um nun weiter unterscheiden zu können, welche von den Wurzeln der Gleichung (48) einem Maximum, einem Minimum oder einem Wendepunkt entspricht, unterwerfen wir den Richtungswinkel der Tangente einer weiteren Untersuchung, indem wir $tg\, \alpha = u = \frac{dy}{dx}$ als selbstständige Funktion auffassen und in den einzelnen Fällen die zugehörige Funktionscurve construiren. Zunächst ist aus den gegebenen Erörterungen klar, daſs für $x = a$ in den 4 Fällen $u = o$ ist,

d. h. dafs die 4 neuen Curven die x-Achse in $x = a$ durchschneiden. Weiter wissen wir, dafs bei Fig. 3a in $M_{,}$ u positiv ist, von $M_{,}$ nach M hin u kleiner wird, aber positiv bleibt, in M gleich Null, von M nach $M_{,,}$ negativ ist und abgesehen vom Zeichen immer gröfser wird. Fig. 3b repräsentirt uns daher im Allgemeinen den Verlauf dieser Curve und zeigt uns, dafs für den Punkt m oder $x = a$ der Richtungswinkel der Tangente, nämlich β, ein stumpfer Winkel sein mufs, dessen trigonometrische Tangente negativ ist. Da aber $\operatorname{tg} \beta = \left[\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right]_{x=a} = \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a}$, so haben wir für ein Maximum der Funktion die zwei Bedingungsgleichungen:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = 0 \qquad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a} < 0 \tag{49}$$

In Fig. 4a ist für $M_{,}$ u negativ; von $M_{,}$ nach M wird u immer kleiner, in M gleich Null, von M nach $M_{,,}$ hin ist u positiv und im Zunehmen begriffen. Fig. 4b stellt daher den allgemeinen Verlauf dieser Curve dar und zeigt uns, dafs in dem Minimalpunkt m $\operatorname{tg} \beta$ positiv sein mufs. Für ein Minimum der Funktion bestehen daher die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = 0 \qquad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a} > 0 \tag{50}$$

Es ist nicht schwer zu constatiren, dafs Fig. 5b und Fig. 6b die Funktionscurven für $u = f'(x)$ darstellen, welche den darüber stehenden Curven entsprechen, wie es auch leicht ist zu beurtheilen, dafs in beiden Fällen die x-Achse selbst Tangente an diese Curven in den Punkten m sein mufs. Wenn demnach

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = 0 \quad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a} = 0, \tag{51}$$

so kann die Curve in $x = a$ einen Wendepunkt haben, doch kann dieser Punkt auch noch ein Maximal- oder Minimalpunkt

sein. Die gegebene Funktion kann nämlich die Eigenthümlichkeit besitzen, dafs für x = a nicht nur der erste und zweite, sondern eine gröfsere Anzahl von Differentialquotienten, die auf einander folgen, gleich Null wird. So hat z. B. in Fig. 3b die Curve nur der Bedingung zu genügen, dafs von $m_{,}$ nach m die Ordinate positiv bleibt und kleiner wird, in m Null wird und von m nach $m_{,,}$ hin negativ bleibt und zunimmt. Bei diesem Lauf kann immerhin m noch ein Wendepunkt werden und Fig. 3b die Form von Fig. 6a annehmen. Dies ist der Fall, wenn $f'(a) = o$ ist, weil dann in x = a die Tangente mit der x-Achse zusammenfällt. In gleicher Weise geht Fig. 4b in Fig. 5a über, wenn $f''(a) = o$ ist. In Fig. 7 stellen A, B, C, D die 4 Typen von f(x) vor und die darunter stehenden Curven repräsentiren die Formen der 4 ersten Differentialquotienten unter der Bedingung, dafs dieselben Null werden für x = a.

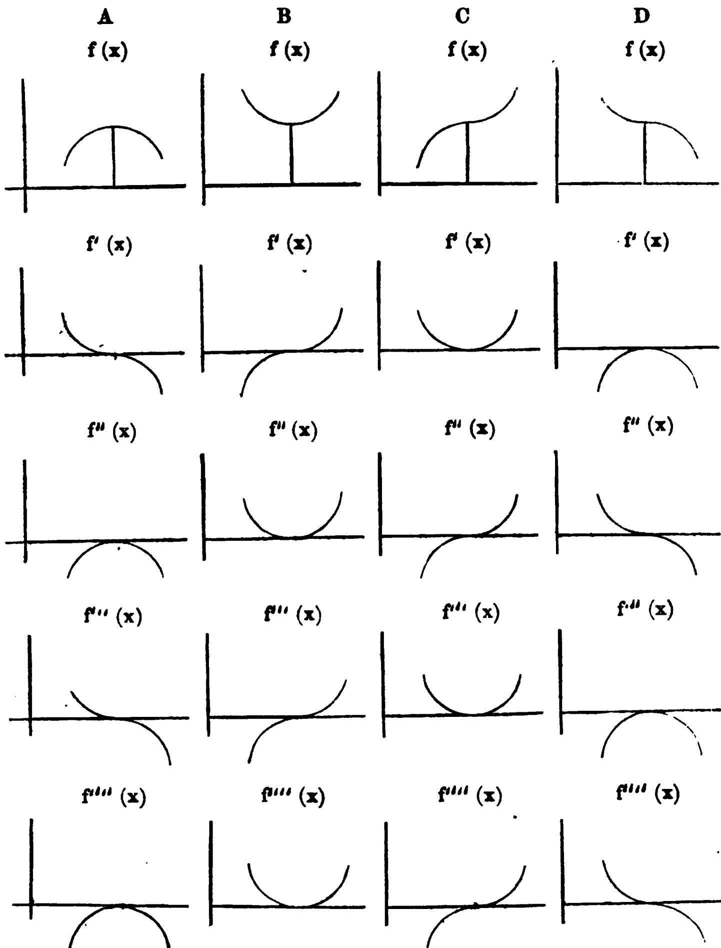
Werden nun für irgend eine gegebene Funktion für x = a alle D.-Q. Null bis zu irgend einem von ungrader Ordnungszahl, z. B. bis zum fünften, so sagt uns dies aus, dafs $f'''(x)$ in x = a eine zur x-Achse parallele Tangente hat, weil ja $f''''(a) = o$ ist, dafs aber $f'''(x)$ in x keinen Wendepunkt besitzen kann, weil ja dann $f'''''(a) = o$ sein müfste. Um also zu wissen, welchem Typus in diesem Fall die Curve f(x) angehört, suchen wir in Fig. 7 die beiden Typen auf, für welche $f'''(x)$ keinen Wendepunkt besitzt und finden C und D. Was hier von dem fünften gesagt wurde, gilt für jeden Differentialquotienten von ungrader Ordnungszahl. Eine Curve hat hiernach in x = a einen Wendepunkt, wenn

$$f'(a) = o,\ f''(a) = o,\ f'''(a) = o, \ldots\ldots\ f^{2n}(a) = o,\ f^{2n+1}(a) \gtrless o.$$

Wenn dagegen der erste nicht verschwindende Differentielquotient von grader Ordnung ist, z. B. $f''''(a) \gtrless o$, so beweist dies, dafs zwar $f''(x)$ in x = a eine zur Achse parallele

Tangente hat, weil ja $f'''(a) = o$ ist, daſs aber $f''(x)$ in $x = a$ keinen Wendepunkt besitzen kann. Dieser Bedingung

Fig. 7.



genügen die Typen A und B, und daher wird $[f(x)]_{x=a}$ ein Maximum oder Minimum, wenn

$$f'(a) = o,\ f''(a) = o, \ldots\ldots f^{2n-1}(a) = o,\ f^{2n}(a) \gtrless o.$$

In diesem Fall hat $f^{2n}(x)$ wieder die Bedeutung von $f''(x)$, so dafs wir für $f^{2n}(a) < o$ ein Maximum, für $f^{2n}(a) > o$ ein Minimum haben.

217. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ Mn. für $x = a$, Mx. für $x = \frac{a}{3}$

218. $y = x^2(1 - x)$ Mn. „ $x = o$, Mx. „ $x = \frac{2}{3}$

219. $y = (a + x)\sqrt{b^2 - x^2}$ Mx. „ $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$

220. $y = x^2(a - x)^2$ Mx. „ $x = \frac{a}{2}$, Mn. f. $x = a$ u. o

221. $y = \frac{4}{3}x\sqrt{ax - x^2}$ Mx. „ $x = \frac{3}{4}a$

222. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ Mn. „ $x = -1$, Mx. für $x = 1$

223. $y = 2x + \frac{a^2}{x}$ Mn. „ $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

224. $y = x^3 + 6x^2 - 15x$ Mx. „ $x = -5$, Mn. für $x = 1$

225. $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{ax - x^2}$ Mx. „ $x = \frac{a}{4}$ u. für $x = \frac{3}{4}a$

226. $y = a(b - x)^2 x$ Mx. „ $x = \frac{b}{3}$, Mn. für $x = b$

227. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ Mx. „ $x = -\sqrt{2}$, Mn. „ $x = +\sqrt{2}$

228. $y = x^{\frac{1}{x}}$ Mx. „ $x = e$

229. $y = \frac{c^2 \sin 2x}{g}$ Mx. „ $x = \frac{\pi}{4}$

330. $y = \frac{a^x}{x}$ Mn. „ $x = \frac{1}{\lg a}$

231. $y = \frac{x}{\lg x}$ Mn. „ $x = e$

232. $y = x^{1 - \lg x}$ Mx. „ $\lg x = \frac{1}{2}$

233. $y = \pm\sqrt{x(2r - x)}$ Mx. „ $x = r$, Mn. für $x = r$

234. $y = \frac{a^3}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$ Mn. für $x = \frac{a}{a+1}$

235. $y = \frac{e^x}{\sin(x-\alpha)}$ Mn. f. $x = \alpha + \frac{\pi}{4}$, Mx. f. $x = \alpha + \frac{5\pi}{4}$

236. $y = \sin x + \cos x$ Mn. für $x = \frac{5}{4}\pi$, Mx. f. $x = \frac{\pi}{4}$

237. $y = \sin 2x + 2\sin(\alpha - x)$ Mx. „ $x = \frac{\alpha}{3}$, Mn. f. $x = -\alpha$

238. $y = \cos x + \cos(\alpha - x)$ Mx. „ $x = \frac{\alpha}{2}$, wenn $\alpha < \pi$

239. $y = \sin x \cos x + \sin(\alpha - x)\cos(\alpha - x)$ Mx. „ $x = \frac{\alpha}{2}$

240. $y = x \sin x$ Mx. „ $\operatorname{tg} x = -x$, oder $x = 116^0\, 14' 21''$

241. $y = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$ Mx. „ $x = 45^0$

242. $y = a^2 \sin^2 x \sin(\alpha - x)$ Mx. „ $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg}(x - \alpha)$

b) Unentwickelte Funktionen einer unabhängigen Variablen.

Auch in der impliciten Funktion $f(xy) = o$ machen diejenigen Werthe von x, welche der Relation $\frac{dy}{dx} = o$ genügen, y zu einem Maximum oder Minimum. Da aber $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$, so haben wir für die Maxima und Minima die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} = o$, welche in Verbindung mit der Gleichung $f(xy) = o$ diejenigen Werthe von x bestimmt, durch welche das zugehörige y ein Maximum oder Minimum wird. Sollte zufällig für die gefundenen Werthe von x und y auch $\frac{\partial f}{\partial y} = o$ werden, so ist $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr gleich Null, sondern unbestimmt, ein Fall, der später besonders untersucht werden soll. So haben wir für die Maxima und Minima impliciter Funktionen die beiden Gleichungen :

$\frac{\partial f}{\partial x} = o$, $f(x\,y) = o$ und $\frac{\partial f}{\partial y} \lessgtr o$ als Bedingungsgleichung (52)

Unter dieser Voraussetzung wird nach (28)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

und wir haben ein Minimum, wenn dieser Werth positiv, ein Maximum, wenn er negativ ist.

Beispiel: $f = y^2 - a\,y - \sin x = o$. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos x = o$; $x = \frac{\pi}{2}$; $\sin x = 1$, $y^2 - a\,y - 1 = o$; $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,y - a = \pm\sqrt{a^2 + 4}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sin x}{\pm\sqrt{a^2+4}} = \frac{-1}{\pm\sqrt{a^2+4}}$; für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $y = \sqrt{a^2+4}$ ein Maximum, für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $y = -\sqrt{a^2+4}$ ein Minimum. Der Gleichung $\cos x = o$ entsprechen noch die weiteren Lösungen $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ etc., welche in gleicher Weise zu untersuchen sind.

243. $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$; $x = o$ gibt $y = +b$ als Mx. und $y = -b$ als Mn.

244. $f = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = o$; $x = \pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ gibt $y = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ als Mx. u. $y = -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ als Mn.

245. $f = 4x^2 - 20x - 8y + 41 = o$; $x = \frac{5}{2}$ gibt $y = 2$ als Mn.

246. $f = (x-y)^2 - 4a(x+y) + 4a^2 = o$; $x = 2a$ gibt $y = o$ als Mn.

247. $f = x^4 - 2a^2x^2 - 4ay^3 + a^4 = o$; $x = o$ gibt $y = \frac{a}{2}\sqrt[3]{2}$ als Mx. $x = \pm a$ gibt $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$

248. $f = x^3 - 3a^2x + y^3 = o$; $x = a$ gibt $y = a\sqrt[3]{2}$ als Mx.

$x = -a$ gibt $y = -a\sqrt[3]{2}$ als Mn.

c) Funktionen von der Form : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ bedingt nach (27) für diese Funktionen die andere :

$$\frac{dy}{dt} = o \tag{53}$$

und nach (53) reducirt sich in (29) $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf den einfachen Werth :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Je nachdem dieser Werth positiv oder negativ ist, haben wir wieder ein Minimum oder Maximum der Funktion.

Beispiel : $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$;

$\frac{dy}{dt} = a \sin t = o.$

$t = o, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots\ldots$; $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$; für $t = o$, 2π, 4π wird $\frac{dx}{dt} = o$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \infty$, daher sind diese Werthe nicht zulässig. Dagegen wird für $t = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots\ldots$ $x = a\pi$, $3a\pi$, $5a\pi \ldots\ldots$, $y = 2a$ und $\frac{d^2y}{dx^2} < o$, folglich ist $y = 2a$ ein den verschiedenen Werthen von x entsprechendes Maximum der Funktion.

249. $y = b \sin t$, $x = a \cos t$; $\frac{dy}{dt} = b \cos t = o$; $t = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

$t = \frac{\pi}{2}$ gibt $x = o$ und $y = b$ als Mx., $t = \frac{3\pi}{2}$ gibt $x = o$ und $y = -b$ als Mn. der Funktion.

250. $y = \sin^2 t,\ x = \sin 2t;\ \frac{dx}{dt} = \sin 2t = 0;\ 2t = 0,\ \pi,$ $2\pi,\ 3\pi$ etc.

$t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots$ gibt y als Mn., $t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},$ $\frac{5\pi}{2} \ldots$ gibt y als Mx. der Funktion.

d) Relative Maxima und Minima.

Wenn $z = f(xy)$ ist, und zwischen x und y die weitere Gleichung besteht: $\varphi(xy) = 0$, so sollen x und y so bestimmt werden, daſs sie der Gleichung $\varphi = 0$ genügen und zugleich z zu einem Maximum oder Minimum machen. Solche Mx. und Mn. werden relative genannt. Beispiel: In einen Kreis soll das gröſste Rechteck gezeichnet werden. $\varphi(xy) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ sei die Gleichung des Kreises, x y seien die gesuchten Coordinaten eines Eckpunktes des Rechtecks, so ist $z = 4xy$ der Werth, der ein Mx. werden soll, und zwar durch Werthe für x und y, welche der Gleichung $\varphi = 0$ genügen. Bei einfachen Aufgaben wird man den Werth für eine der Variablen aus $\varphi = 0$ entnehmen und in die Gleichung $z = f(xy)$ substituiren. In unserem Beispiel ist $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; daher $z = 4x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$. In vielen Fällen ist jedoch diese Substitution äuſserst schwierig, in den meisten ganz unmöglich. Wir entwickeln daher für derartige Aufgaben ein anderes Verfahren.

Die gesuchten Werthe von x und y müssen vor allem der Gleichung genügen:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (A)$$

Die Gleichung $\varphi = 0$ liefert durch Differenziren:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (B)$$

Wird aus (A) und (B) $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad \text{(C)}$$

Aus (C) und $\varphi = 0$ können wir die Werthe von x und y finden, welche z zu einem Mx. oder Mn. machen.

Die Gleichung (C) kann in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad \text{(D)}$$

zerlegt werden, worin λ eine beliebige Constante vorstellt, durch deren Elimination (C) wieder entsteht. Nun ist $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y}$, und so haben wir zur Berechnung derjenigen Werthe von x und y, welche z zu einem Mx. oder Mn. machen, die 3 Gleichungen :

$$\frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi (x\,y) = 0 \qquad (54)$$

Der Gang der Rechnung ist der, daſs man zuerst aus den beiden ersten Gleichungen λ eliminirt und so eine Relation zwischen x und y gewinnt, welche in Verbindung mit der dritten Gleichung x und y bestimmt. In obigem Beispiel ist $f = 4\,x\,y$, oder das halbe Rechteck $= 2\,x\,y$, und $(f + \lambda \varphi) = 2\,x\,y + \lambda\,(x^2 + y^2 - r^2)$; $\frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x} = 2\,y + 2\,\lambda\,x = 0$; $\frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y} = 2\,x + 2\,\lambda\,y = 0$. λ eliminirt gibt $y^2 = x^2$ und $\varphi = 2\,x^2 - r^2 = 0$, woraus folgt: $x = y = \frac{r}{2}\sqrt{2}$.

Die Frage, ob die gefundenen Werthe einem Mx. oder Mn. der Funktion entsprechen, muſs auch hier wieder durch das Vorzeichen von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ entschieden werden. Wird aus (B) der Werth $\frac{dy}{dx}$ in (A) substituirt, ohne (A) = o zu setzen, so ist:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Setzen wir $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v$, so ist:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{\frac{du}{dx}}{v},$$

weil nach (C) $u = o$ ist. Nun mufs u total nach x differenzirt werden, und da es eine Funktion von x und y ist, so ist $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y}\right]\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

$$+ \frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right]\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

Wird nach (D) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ gesetzt, so ist:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

$$+ \frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y}$$

Nach dieser Substitution und vollständiger Reduction wird:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}$$

Das Vorzeichen dieses Werthes ist unabhängig von dem Nenner und der Zähler kann in Form einer Determinante geschrieben werden:

$$\varDelta = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} \qquad (55)$$

Ist $\varDelta$ positiv, so ist z ein Minimum, wenn negativ, ein Maximum. In unserem Beispiele ist:

$$\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} = 2\lambda$$

$$\varDelta = -\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 2x \\ 2 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8\,(2xy - \lambda r^2) = -16 r^2.$$

Beispiel: Für welche Werthe von x und y wird $z = xy$ ein Maximum oder Minimum, wenn die Bedingungsgleichung besteht: $\varphi(xy) = x^3 + y^3 - axy = 0$?

$$(f + \lambda\varphi) = xy + \lambda\,(x^3 + y^3 - axy);$$

$$\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x} = y + \lambda(3x^2 - ay) = 0; \quad \frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y} = x + \lambda(3y^2 - ax) = 0;$$

daraus folgt: $x = y$, und dann aus $\varphi = 0$ weiter: $x = y = \frac{a}{2}$;

$$\lambda = -\frac{2}{a}; \quad z = \frac{a^2}{4}; \quad \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} = 6\lambda x = -6;$$

$$\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} = 6\lambda y = -6; \quad \frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y} = 1 - \lambda a = 3;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2 - ay = \frac{a^2}{4}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y^2 - ax = \frac{a^2}{4}.$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -6 & 3 & \frac{a^2}{4} \\ 3 & -6 & \frac{a^2}{4} \\ \frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{4} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{9}{8}a^4$$

$z = \frac{a^2}{4}$ ist ein Mx.

251. Aus den Seiten a, b, c, d soll das an Fläche gröfste Viereck construirt werden.

Schliessen a und b den Winkel x, c und d den Winkel y ein, so ist $2\,Fl = ab \sin x + cd \sin y = z$. Durch die Diagonale wird die Bedingungsgleichung vermittelt: $\varphi = 2cd \cos y - 2ab \cos x + a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0$. Wir erhalten $\cos x + 2\lambda \sin x = 0$; $\cos y - 2\lambda \sin y = 0$, oder $\sin(x + y) = 0$, d. h. $x + y = 180^0$. Das gesuchte Viereck ist ein Kreisviereck.

252. Aus zwei Seiten a und b das gröfste Dreieck zu construiren.

$2\,Fl = ab \sin x$ wird Mx. für $x = 90^0$.

253. Wie ist der Halbmesser eines Kreises zu wählen, wenn ein Ausschnitt von gegebenem Umfang 2a den gröfsten Flächeninhalt haben soll?

rad. $= x$, arc $= y$ gibt $2x + y = 2a$, $Fl = \frac{yx}{2}$ $= x(a - x)$ wird Mx. für $\frac{a}{2}$.

254. Aus einer Seite a und dem gegenüberliegenden Winkel α, oder über der Sehne eines gegebenen Kreisabschnitts das gröfste Dreieck zu zeichnen.

Sind x und y die beiden an a liegenden Winkel, so ist $2\,Fl = \frac{a^2 \sin x \sin y}{\sin \alpha}$, also $z = \sin x \sin y$;

$\varphi = x + y + \alpha - 180^0 = o$. z wird Mx. für $x = y$. Das Dreieck ist gleichschenkelig.

255. Wie grofs mufs der Winkel an der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks im Kreis sein, wenn die Fläche ein Mx. werden soll?

Ist x der gesuchte Basiswinkel, so ist $Fl = 4 r^2 \sin^3 x \cdot \cos x$ und wird Mx. für $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $x = 60^0$. Das Dreieck ist gleichseitig.

256. In einen graden Kegel soll der an Inhalt gröfste Cylinder gelegt werden.

Es sei r der Basishalbmesser, h die Höhe des Kegels, x der Basishalbmesser, y die Höhe des Cylinders, so ist $Vol. = x^2 y \pi$ und $\varphi = h x + r y - h r = o$. Vol. wird ein Mx. für $y = \frac{h}{3}$, $x = \frac{2r}{3}$.

257. Welcher grade Cylinder, dessen Oberfläche $= a^2$ ist, hat den gröfsten Cubikinhalt?

Wenn x der Basishalbmesser, y die Höhe des Cylinders, so ist $Vol. = x^2 y \pi = z$ und $\varphi = 2 x^2 \pi + 2 x y \pi - a^2 = o$. Der Inhalt wird ein Mx., wenn $y = 2 x$, oder $x = a \sqrt{\frac{1}{6\pi}}$, $y = 2 a \sqrt{\frac{1}{6\pi}}$.

258. In eine Kugel soll der Cylinder von gröfster Oberfläche gelegt werden.

Es sei $AB = 2 u$ der Basisdurchmesser, v die halbe Höhe des Cylinders, $AC = r$ der Kugelhalbmesser, x der Winkel, welchen AC mit AB bildet, also $x = W. CAB$. Dann ist $u = r \cos x$, $v = r \sin x$, halbe Oberfläche $= u^2 \pi + 2 u \pi . v = 2 r^2 \pi \cos x \sin x + r^2 \pi \cos^2 x$. Man erhält ein Mx. für $\operatorname{tg} 2 x = 2$.

259. Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks ist constant, $y + z = 2 s$, wie mufs man y und z wählen, wenn die Hypotenuse x ein Mn. werden soll?

x wird ein Mn. für $y = z = s$.

260. Die Grundlinie b und Höhe h eines Dreiecks sind gegeben, wie ist das Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe der beiden anderen Seiten ein Mn. werden soll?

Die Summe der beiden Seiten ist $z = \frac{h}{\sin x} + \frac{h}{\sin y}$, wenn wir durch x und y die beiden Winkel an der Grundlinie bezeichnen. Weiter ist $2\,Fl = b\,h = \frac{b^2 \sin x \sin y}{\sin(x+y)}$, woraus $\varphi = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y - \frac{b}{h} = o$. z wird ein Mn. für $x = y$, d. h. im gleichschenkeligen Dreieck.

261. Welcher von allen graden Kegeln von gleicher Seitenlänge s hat den gröfsten Cubikinhalt?

x = Basishalbmesser, y = Höhe des Kegels, Vol. $= x^2 y \pi = z$, $\varphi = x^2 + y^2 - s^2 = o$; z wird Mx. für $x = s\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = s\sqrt{\frac{1}{3}}$.

262. Unter welchem Elevationswinkel mufs eine Kugel abgeschossen werden, wenn die Schufsweite ein Mx. werden soll?

Ist der Elevationswinkel $= x$, so ist die Schufsweite $y = \frac{c^2 \sin 2x}{g}$ ein Mx. für $x = 45^0$.

263. Aus einem cylindrischen Holzstamm, dessen Durchmesser $= d$, soll ein Balken in der Form eines Parallelepipedes so gehauen werden, dafs seine Tragkraft ein Mx. wird, welches ist die Höhe $= x$ und die Breite $= y$ dieses Balkens?

Die Tragkraft ist $T = C\,y\,x^2$, indem C eine Constante bedeutet, $\varphi = x^2 + y^2 - d^2 = o$, T wird Mx. für $y = d\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x = d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

264. Aus einem gegebenen Kreis, dessen rad. $= r$ und dessen Mittelpunkt C ist, soll ein Sector ACB so geschnitten werden, dafs der übrig bleibende Theil der Kreisfläche

als Kegelmantel verbraucht einen Kegel von möglichst grofsem Cubikinhalt gibt.

Ist x der übrige Theil der Peripherie, y der Halbmesser der Kegelbasis, so ist $x = 2y\pi$, Höhe $= \sqrt{r^2 - y^2}$, Vol. $= \frac{y^2\pi}{3}\sqrt{r^2 - y^2}$ wird ein Mx. für $y = r\sqrt{\frac{2}{3}}$, oder $x = 2r\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

265. Auf den Seiten AB und BC eines Dreiecks sollen die beiden Punkte M und N so gefunden werden, dafs die Linie MN das Dreieck halbirt und ein Mn. ist.

$BM = x$, $BN = y$, $BA = a$, $BC = b$, $MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos B$, $\varphi = xy - \frac{ab}{2} = o$; $z = x^2 + y^2 - ab\cos B$ wird Mn. für $x = y = \sqrt{\frac{ab}{2}}$.

266. Eine Grade MN und zwei auf derselben Seite gelegene Punkte A und B sind gegeben, man soll in der Graden einen Punkt C so finden, dafs AC + BC ein Mn. wird.

Wir ziehen $AP \perp MN$, $BQ \perp MN$, setzen $AP = p$, $BQ = q$, $PQ = a$, W. $ACP = x$, W. $BCQ = y$; dann ist $AC = \frac{p}{\sin x}$, $BC = \frac{q}{\sin y}$, $z = \frac{p}{\sin x} + \frac{q}{\sin y}$, $CP = \frac{p}{\operatorname{tg} x}$, $CQ = \frac{q}{\operatorname{tg} y}$, $\varphi = \frac{p}{\operatorname{tg} x} + \frac{q}{\operatorname{tg} y} - a = o$.
z wird Mn. für $x = y$.

267. Man soll beweisen, dafs der Kreis als dasjenige regelmäfsige Vieleck anzusehen ist, welches bei constantem Umfang P die gröfste Fläche besitzt.

Bezeichnet x die Seitenzahl eines Vielecks vom Umfang P, so ist dessen Fläche $= \frac{P^2}{4x} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi}{x} = z$. Für das Mx. findet man die Bedingung: $\sin\frac{2\pi}{x} = \frac{2\pi}{x}$, welche durch $x = \infty$ erfüllt wird.

268. In einem Dreieck ABC ist DE so parallel zu AB zu ziehen, dafs, wenn noch EG parallel AC gezogen wird, Parallelogramm ADEG ein Mx. wird.

Mx. für $AD = \frac{1}{2} AC$.

269. Zwischen den Schenkeln eines Winkels α, dessen Scheitel D ist, ist ein Punkt A gegeben. Man soll durch A eine Grade BC so legen, dafs das abgeschnittene Dreieck BCD ein Mn. wird.

Man ziehe $AH \parallel DC$, $AG \parallel DB$ und setze $DB = x$, $DC = y$, $GA = a$, $AH = b$, so ist $\triangle DBC = \frac{x\,y \sin\alpha}{2}$ und $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} - 1 = 0$. Man erhält ein Mn., wenn $x = 2a$, $y = 2b$.

270. Zwei Tangenten eines Kreises bilden einen Winkel $= 2\alpha$. Wie ist eine dritte Tangente zu legen, wenn das dem Kreise umschriebene Tangentendreieck ein Mn. werden soll?

Die Winkel, welche die gesuchte Tangente mit den gegebenen bildet, seien $2x$ und $2y$, so ist $Fl = r^2 . (\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg}\alpha)$, $\varphi = x + y + \alpha - 90^0 = 0$; Fl. wird Mn. für $x = y$.

271. In einen Kreisabschnitt soll das gröfste Rechteck gezeichnet werden.

Es sei C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, AB die Sehne des Abschnittes, CG ihr Abstand vom Mittelpunkt, DM eine zu AB parallele Sehne, also D und M zwei Ecken des Rechtecks, DP und MN zwei Senkrechten zu AB, daher DPNM das gesuchte Rechteck. Man setze $CG = b$, $GN = x$, $NM = y$, so ist $Fl = 2\,x\,y$, $\varphi = x^2 + (y + b)^2 - r^2 = 0$; für $y = \frac{-3b \pm \sqrt{b^2 + 8r^2}}{4}$ wird Fl. ein Mx.

272. Im Kreis ist eine Sehne AB gegeben, man soll im kleineren Abschnitt eine zweite Sehne DM so ziehen, daſs das Paralleltrapez ABMD ein Mx. wird.

Es sei CH der zu AB senkrechte Halbmesser, der AB in P, DM in N schneidet, so ist $Fl = (AP + DN) PN$, oder wenn W. $ACH = \alpha$, $DCH = x$, $Fl = r^2 (\sin x + \sin \alpha) . (\cos x - \cos \alpha)$. Fl. wird ein Mx. für $\cos 2x - \cos (\alpha - x) = o$, oder $x = \frac{\alpha}{3}$.

273. In eine Pyramide soll das gröſste Prisma mit ähnlicher Grundfläche gelegt werden.

Wenn B die Grundfläche, h die Höhe der Pyramide, y die Grundfläche, x die Höhe des Prisma, so ist Vol. $= xy$ und $y : B = (h - x)^2 : h^2$. Wenn $x = \frac{h}{3}$, wird Vol. ein Mx.

274. In eine Kugel soll die gröſste grade Pyramide auf quadratischer Basis gelegt werden.

Wenn x der Abstand der Grundfläche vom Kugelmittelpunkt, y die halbe Seite der Grundfläche ist, so ist Vol. $= \frac{4 y^2 (r + x)}{3}$, $\varphi = 2 y^2 + x^2 - r^2 = o$. Vol. ein Mx., wenn $x = \frac{r}{3}$.

275. Ein regelmäſsiges Tetraëder ist gegeben, in welcher Entfernung von der Spitze muſs ein zur Basis paralleler Schnitt geführt werden, wenn die auf der Schnittfläche errichtete Pyramide, deren Spitze in der Basis des Tetraëders liegt, ein Mx. werden soll?

Es sei B die Basis, h die Höhe des gegebenen Tetraëders, x der Abstand der Schnittfläche von der Spitze, so ist Vol. $= \frac{B x^2 (h - x)}{3 h^2}$ und wird Mx., wenn $x = \frac{2}{3} h$.

276. In welcher Entfernung von der Spitze mufs ein halbes Octaëder parallel zur Basis durchschnitten werden, wenn das über der Schnittfläche errichtete rechtwinkelige Prisma, dessen Grundfläche in der Basis des gegebenen Körpers liegt, ein Mx. werden soll?

Es sei a die Grundkante, h die Höhe des gegebenen, x die Grundkante, y die Seitenkante des gesuchten Körpers, so ist Vol. $= x^2 y$ und $\varphi = h x + a y - a h = o$, weil $x^2 : a^2 = (h - y)^2 : h^2$. Für $x = \frac{2}{3} a$ und $y = \frac{h}{3}$ wird Vol. ein Mx.

277. Zwei Punkte einer Ellipse sind gegeben, man soll einen dritten Curvenpunkt so finden, dafs das Dreieck dieser 3 Punkte ein Mx. wird.

Die Coordinaten der Punkte seien $(\alpha \beta)$, $(\alpha_, \beta_,)$, $(x y)$, so ist $2 \mathrm{Fl} = x(\beta - \beta_,) - y(\alpha - \alpha_,) + \alpha \beta_, - \alpha_, \beta$; $\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$. $\beta - \beta_, = \delta$, $(\alpha_, - \alpha) = \delta_,$ gesetzt, wird Fl ein Mx., wenn $x = \frac{a^2 \delta}{\sqrt{b^2 \delta_,^2 + a^2 \delta^2}}$.

278. Auf einem Ellipsenquadranten einen Punkt so zu finden, dafs dessen Durchmesser und Normale den gröfsten Winkel einschliefsen.

Wenn $(x y)$ der gesuchte Punkt, ψ der betreffende Winkel, so ist $\operatorname{tg} \psi = \frac{(a^2 - b^2) x y}{a^2 b^2}$, und dieser Werth wird ein Mx., wenn $x y$ ein Mx. Weiter ist $\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$. Wir finden $x = \frac{a}{2} \sqrt{2}$, $y = \frac{b}{2} \sqrt{2}$.

279. Einem gegebenen Rechteck die kleinste Ellipse zu umschreiben.

Sind a und b die halben Rechteckseiten, x und y die halben Achsen, so ist $\mathrm{Fl} = x y \pi$ und $\varphi = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = o$. Fl wird Mn. für $x = a \sqrt{2}$, $y = b \sqrt{2}$.

280. Auf einem Ellipsenquadranten soll ein Punkt (x y) so gefunden werden, dafs die Tangente dieses Punktes mit den beiden Achsen das kleinste Dreieck einschliefst.

Gleichung der Tangente: $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = o$, die Abschnitte der beiden Achsen $Xo = \frac{a^2}{x}$, $Y_0 = \frac{b^2}{y}$, Dreiecksfläche $= \frac{Xo\ Yo}{2} = \frac{a^2 b^2}{2xy}$ wird ein Mn., wenn $z = xy$ ein Mx. wird. $\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$. $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

281. In ein Parabelsegment, dessen Sehne senkrecht zur Achse steht, soll das Rechteck vom kleinsten Umfang gezeichnet werden.

Scheitel der Parabel sei A, DE die gegebene Sehne, B ihr Schnittpunkt mit der Achse, CK eine zu DE parallele Sehne, mithin C und K Curvenpunkte und Ecken des gesuchten Rechtecks, CK schneidet die Achse in F. Setzt man AB = a, AF = x, CF = y, so ist der halbe Umfang $z = 2y + a - x$ und $\varphi = y^2 - 2px = o$; z wird Mn. für $y = p$.

282. In der Achse einer Parabel ist ein Punkt B gegeben. Zwischen B und dem Scheitel A soll eine Sehne CD so senkrecht zur Achse gelegt werden, dafs der Kegel, welcher entsteht, wenn sich das Dreieck CBD um die Parabelachse dreht, ein Mx. wird.

Es mag CD die Achse in P schneiden, AB = a, AP = x, CP = y sein, so ist Vol. $= \frac{y^2 \pi (a - x)}{3}$ und $\varphi = y^2 - 2px = o$. Wir finden ein Mx. für $x = \frac{a}{2}$.

283. Durch einen in der Achse der Parabel gegebenen Punkt B soll die kleinste Sehne gezogen werden.

Die Coordinaten von B mögen (a o) sein, die der Sehnenendpunkte (x_1 y_1) und (x_2 y_2), die Länge der Sehne = s, so ist $s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Da B auf der Sehne liegt, so besteht die Relation: $-y_1 (x_1 - x_2) = (y_1 - y_2)(a - x_1)$. Nach Substitution und Reduction erhalten wir $s^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2p(x_1 + x_2) - 4p\sqrt{x_1 x_2}$ und $\varphi = x_1 x_2 - a^2 = o$; s wird Mn., wenn $x_1 = x_2 = a$.

284. Ein Winkel ACB = α ist gegeben. Auf dem Schenkel AC bewegt sich ein Punkt von A aus nach C mit der Geschwindigkeit v; zu gleicher Zeit mit Punkt A beginnt Punkt C seine Bewegung nach B hin mit der Geschwindigkeit v_1; nach wie viel Zeiteinheiten werden beide Punkte ihre kürzeste Entfernung haben?

Befindet sich dann Punkt A in P, Punkt C in P_1, und setzen wir AC = a, so ist AP = v t, $CP_1 = v_1 t$. $PP_1^2 = d^2 = (a - vt)^2 + (v_1 t)^2 - 2(a - vt) \cdot v_1 t \cos\alpha$; d wird Mn., wenn $t = \frac{av + av_1 \cos\alpha}{v^2 + v_1^2 + 2vv_1\cos\alpha}$.

285. Ein grader Kegel BAC, dessen Spitze A und dessen Basishalbmesser BC = 2 r ist, soll durch eine zu AB parallele Ebene so geschnitten werden, dafs die als Schnittfläche entstehende Parabel den gröfsten Flächeninhalt hat.

Es sei S der Scheitel, SD die Achse der Parabel, D der Schnittpunkt der Parabelachse SD mit der Achse des Kegels, SD = x und die zu x gehörige Ordinate HD = y, AB = s. Dann ist $Fl = \frac{2}{3}xy$, $y^2 = BD \cdot DC = DC(2r - DC)$. Weiter ist $DC : x = 2r : s$ und $y = \frac{2r}{s}\sqrt{sx - x^2}$. Man findet, dafs Fl. ein Mx. wird für $x = \frac{3}{4}s$, oder $AS = \frac{1}{4}AC$.

286. Um ein gleichschenkeliges Dreieck soll die an Fläche kleinste Ellipse gelegt werden.

Durch die Spitze A des Dreiecks ABC legen wir die y-Achse senkrecht zur Dreieckshöhe = h und haben dann als Scheitelgleichung der Ellipse: $a^2y^2 = b^2(2ax - x^2)$. Ist n die halbe Dreiecksbasis, so ist $a^2n^2 = b^2(2ah - h^2)$. Die Fläche $Fl = a b \pi$ wird ein Mn. für $a = \frac{2}{3} h$.

287. In ein gleichschenkeliges Dreieck soll eine Ellipse so gelegt werden, dafs sie die Seiten des Dreiecks berührt und an Fläche ein Mx. wird.

Wir wählen die Dreieckshöhe DC = h zur x-Achse, die Basis AB = 2n zur y-Achse und haben als Scheitelgleichung der Ellipse : $a^2 y^2 = b^2 (2ax - x^2)$, als Gleichung von AC : $y = -\frac{n}{h} x + n = kx + n$. Suchen wir die Schnittpunkte der Graden AC mit der Curve und setzen den Wurzeltheil dieses Ausdrucks = o, so erhalten wir die Bedingungsgleichung dafür, dafs AC die Curve berührt. Wir finden : $n^2 + 2kan - b^2 = o$. Die Fläche $Fl = a b \pi$ wird ein Mx. für $a = \frac{h}{3}$.

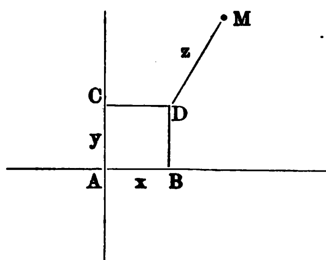
288. In ein gleichschenkeliges Dreieck soll eine Parabel so gelegt werden, dafs sie die beiden Schenkel berührt und das von der Dreiecksbasis begrenzte Parabelflächensegment ein Mx. wird.

A sei die Spitze, h die Höhe, BC = 2 n die Basis des Dreiecks, A der Anfangspunkt, h die x-Achse des Systems, S der Parabelscheitel, AS = a. Die Curvengleichung ist dann : $y^2 = 2p(x - a)$, die Gleichung von AB : $y = \frac{n}{h} x \doteq kx$. Als Bedingung dafür, dafs AB die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, d. h. berührt, finden wir : $p - 2k^2a = o$. Das Flächensegment $Fl = \frac{2}{3} \sqrt{2p(h - a)^3}$ wird ein Mx., wenn $a = \frac{h}{4}$.

§ 12. **Maxima und Minima von Funktionen mit zwei unabhängigen Variabeln.**

Um eine Funktion von 2 unabhängigen Veränderlichen, z = f (x y), graphisch darzustellen, tragen wir auf 2 zu einander senkrechten Achsen beliebige Werthe für die unabhängigen Veränderlichen, machen also AB = x, AC = y, ziehen CD und DB parallel zu den Achsen, und errichten in D die Senkrechte MD = z, indem z = f (x y). Werden so die Werthe von x und y continuirlich geändert, so beschreibt der Punkt M eine Fläche. Spricht man daher von einem Maximum oder Minimum einer solchen Funktion z, so versteht man darunter solche Werthe von z, für welche der zugehörige Flächenpunkt M der Achsenebene BAC entweder so nah als möglich, oder so fern als möglich liegt. Legen wir durch einen solchen Punkt M beliebig viele Ebenen senkrecht zur Achsenebene, so erhalten wir eine Reihe von Schnittcurven auf der Funktionsfläche, und für alle diese Curven mufs M ein Maximal- oder Minimalpunkt sein. Wir erkennen daraus, dafs die sämmtlichen Tangenten, welche an alle diese Curven durch besagten Punkt gezogen werden, parallel zur Achsenebene sein müssen. Legen wir in der Achsenebene beliebige Curven durch den Punkt D, so repräsentiren diese ganz beliebige Funktionen zwischen den beiden unabhängigen Veränderlichen x und y. Jedem Punkt dieser Curven entspricht ein ganz bestimmter Werth von x und y, und diesen wieder ein ganz bestimmter Werth von z, woraus man erkennt, dafs jeder beliebigen Curve in der Achsenebene eine ganz bestimmte Curve auf der Funktionsfläche entspricht, so zwar, dafs die Punkte der Flächencurve senkrecht über den zugehörigen Punkten der

Fig. 8.



Curve in der Ebene liegen. Können wir nun einen Werth z so finden, dafs er für alle diese Flächencurven ein Maximum oder Minimum der Ordinate vorstellt, so nennen wir ein solches z ein Maximum oder Minimum der Funktion $z = f(x\,y)$. In unserem vorigen Abschnitt haben wir ebenfalls die Maxima und Minima von $z = f(x\,y)$ bestimmt, aber unter der Voraussetzung, dafs zwischen x und y noch die Bedingungsgleichung bestand : $\varphi(x\,y) = o$. Nach dem Gesagten unterscheidet sich daher unsere jetzige Aufgabe von der genannten früheren blos dadurch, dafs eine solche Bedingungsgleichung zwischen x und y nicht existirt, da ja für jede beliebige Curve in der Achsenebene das Maximum oder Minimum gefunden werden soll. Wir führen mithin unsere Aufgabe auf die frühere zurück, indem wir die beliebig wählbare Funktion $\varphi(x\,y) = o$ hinzunehmen, oder den Zusammenhang zwischen x und y durch die beiden beliebig wählbaren Funktionen $x = \varrho(t)$, $y = \pi(t)$ ausdrücken. Denkt man sich nun auch z als Funktion von t, so wird z ein Maximum oder Minimum, wenn $\frac{dz}{dt} = o$ ist. Diese Bedingung wird ausgedrückt durch die Gleichung :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = o.$$

Da aber die Funktionen $x = \varrho(t)$, $y = \pi(t)$ noch beliebig gewählt werden dürfen, so wählen wir sie so, dafs $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = o$ wird, und umgekehrt, setzen diese Werthe oben ein und finden, dafs diejenigen Werthe von x und y, welche z zu einem Maximum oder Minimum machen, den beiden Bedingungsgleichungen genügen müssen :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = o \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = o.$$

Aus diesen beiden Gleichungen zwischen x und y können die gesuchten Werthe gefunden werden. Die Frage, welche von diesen Werthen die Funktion zu einem Maximum, welche

sie zu einem Minimum machen, wird wieder durch das Vorzeichen von $\frac{d^2z}{dt^2}$ entschieden.

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dt}\right] + \frac{dy}{dt}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right]$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x} = o$, $\frac{\partial f}{\partial y} = o$, so wird:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'^2 + 2\frac{d^2 f}{\partial x\,\partial y}x'y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2,$$

wenn man $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$ setzt. Die zweiten D.-Q. werden in dieser Gleichung zu Constanten, wenn man für x und y die gefundenen Werthe einsetzt. Dagegen sind x' und y' von einander unabhängige beliebig wählbare Gröfsen. Es ist nun zu untersuchen, unter welchen Umständen obiger Werth positiv oder negativ wird. Die Funktion $s = a x^2 + 2 b x y + c y^2$ ist unter gewissen Umständen für jeden Werth der Variablen positiv, unter anderen Umständen immer negativ, unter noch anderen bald positiv, bald negativ. Es ist nämlich:

$$s = a x^2 + 2 b x y + c y^2 = \frac{(a x + b y)^2 + (a c - b^2) y^2}{a}$$

Ist nun $a c - b^2 \geqq o$ und zugleich $a > o$, so ist s immer positiv; ist $(a c - b^2) \geqq o$ und zugleich $a < o$, so ist s immer negativ; ist $a c - b^2 < o$, so ist s bald positiv, bald negativ. Setzen wir $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so haben wir unseren Ausdruck für $\frac{d^2z}{dt^2}$. Demnach ist:

$$\frac{d^2z}{dt^2} > o, \text{ wenn } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \geqq o \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > o.$$

Die Funktion ist dann ein Minimum.

$\frac{d^2z}{dt^2} < o$, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \geqq o$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < o$.

Die Funktion ist dann ein Maximum.

289. $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$; Minimum für $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

290. $z = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; Mn. für $x = y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$.

291. $z = (x + y)^2 - (x + 5y + xy)$; Mn. für $x = -1$, $y = 3$.

292. $z = xy^2(a - x - y)^3$; Mx. für $x = \frac{a}{6}$, $y = \frac{a}{3}$.

293. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$; Mx. für $x = y = 60^0$.

294. $z = \sin x \sin y \sin(\alpha - x - y)$; Mx. für $x = y = \frac{\alpha}{3}$.

295. Eine Zahl a soll so in 3 Theile zerlegt werden, daſs das Produkt dieser Theile ein Maximum wird.

Man hat $x + y + u = a$, $xyu = xy(a - x - y) = z$. Für $x = y = u = \frac{a}{3}$ wird z ein Mx.

296. Der Cubikinhalt eines Parallelepipedes ist $= a^3$; wie groſs müssen seine 3 Kanten sein, wenn die Oberfläche ein Minimum werden soll?

Die Kanten müssen gleich und = a sein.

297. In eine gegebene Kugel soll das gröſste rechtwinkelige Parallelepiped gelegt werden.

Kugelhalbmesser = r, die halben Kanten x, y, z gesetzt, gibt : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Vol. $= 8xyz$ wird ein Mx. für $x = y = z = r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

298. In einen Kreis soll das an Fläche gröſste Dreieck gezeichnet werden.

Sind x, y, $(360^0 - x - y)$ die 3 Centriwinkel, welche zu den Dreiecksseiten gehören, so ist $2 \triangle = r^2 [\sin x + \sin y + \sin (360^0 - x - y)]$ und wird ein Mx. für $x = y = 120^0$. Das Dreieck ist gleichseitig.

299. Welches Dreieck von constanter Seitensumme $= 2s$ hat den gröſsten Flächeninhalt?

$Fl = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$ wird Mx. für $x = y = \frac{2s}{3}$. Das Dreieck ist gleichseitig.

Integralrechnung.

Unbestimmte Integrale.

§ 1. Einfache Integralformeln.

$$\int a \, dx = a x + C \quad (1)$$

$$\int a x^n \, dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + C \quad (2)$$

$$\int \frac{a}{x^n} \, dx = \int a x^{-n} \, dx = -\frac{a}{(n-1) x^{n-1}} + C \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \lg x + C \quad (4)$$

$$\int (a + b x)^n \, dx = \frac{(a + b x)^{n+1}}{(n+1) b} + C \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{(a + b x)^n} \, dx = -\frac{1}{(n-1) b (a + b x)^{n-1}} + C \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{(a + b x)} = \frac{1}{b} \lg (a + b x) + C \quad (7)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \quad (8)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\lg a} + C \quad (9)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad (10)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,cotg} x + C_1 \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1 \tag{15}$$

Die Integralrechnung hat zunächst die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion f (x) eine andere Funktion F (x) so zu finden, daſs f (x) der erste D.-Q. von F (x) ist, daſs also :

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x).$$

Da die D.-Q. von F (x) und F (x) + C ganz gleich sind, wenn C eine beliebige Constante bedeutet, so können wir der gefundenen Funktion F (x) jede beliebige Constante zufügen, ohne daſs sie aufhört, das Integral von f (x) zu sein. Bis jetzt ist man nicht im Stand, zu einer beliebigen Funktion f (x) die Integralfunktion F (x) zu finden, und man bedient sich bei der Ableitung der Integralformeln der Differentialrechnung, indem man nur die dort gewonnenen Formeln umkehrt. So sind die Formeln 1—15 solche Umkehrungen der entsprechenden Differentialformeln. Soll aber irgend eine andere Form integrirt werden, für welche die Differentialrechnung keine Integrationsformel bietet, so muſs man dieselbe durch Transformation in eine integrirbare Form umwandeln. Hierzu bedient man sich in vielen Fällen der Methode der Substitution, für welche die Formel kurz entwickelt werden soll. Ist $\int f(x)\,dx = y$, so ist $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Soll nun statt der Variablen x die Variable z eingeführt werden, indem man $x = \varphi(z)$ setzt, so ist zunächst $\frac{dy}{dx}$ in die entsprechende Funktion von z umzuwandeln, was nach der Formel (19) der Differentialrechnung geschieht, indem man setzt :

$$\frac{dy}{dz} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\varphi(z)} \cdot \frac{dx}{dz}$$

$$y = \int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\frac{dx}{dz}\,dz \qquad (16)$$

Nach Formel (20) der Differentialrechnung ist

$$\frac{d(u+v+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = u' + v' + w',$$

und daher mufs umgekehrt

$$\int (u' + v' + w')\,dx = u + v + w = \int u'\,dx + \int v'\,dx + \int w'\,dx$$

sein, d. h. das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Theile.

Wenn a eine Constante, so ist nach (23):

$$\frac{d(a\,u)}{dx} = a\,\frac{du}{dx} = a\,u'$$

Umgekehrt mufs daher sein:

$$\int a\,u'\,dx = a\,u = a\int u'\,dx$$

Das Produkt aus einer Constanten mit einer Funktion einer Variablen wird integrirt, indem man das Integral der Funktion mit der Constanten multiplicirt.

1. Beispiel: $y = \int (a + b\,x)^n\,dx;\ a + b\,x = z;\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{b};$

$$y = \int z^n \frac{1}{b}\,dz = \frac{1}{b}\,\frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{b}\,\frac{(a+b\,x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

2. Beispiel: $y = \int \frac{dx}{a+b\,x};\ a + b\,x = z;\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{b};$

$$y = \int \frac{1}{z}\,\frac{dz}{b} = \frac{1}{b}\lg z = \frac{1}{b}\lg(a + b\,x) + C.$$

3. Beispiel: $y = \int \sqrt{a + b\,x}\,dx;\ a + b\,x = z^2;\ \frac{dx}{dz} = \frac{2\,z}{b};$

$$y = \int \frac{2\,z^2}{b}\,dz = \frac{2\,z^3}{3b} = \frac{2}{3b}\sqrt{(a + b\,x)^3} + C.$$

4. Beispiel: $y = \int e^{m\,x}\,dx;\ m\,x = z;\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{m};$

$$y = \frac{1}{m}\int e^z\,dz = \frac{e^z}{m} = \frac{e^{m\,x}}{m} + C.$$

5. Beispiel: $y = \int x^3 \sqrt{x}\, dx;\ x = z^2;\ \frac{dx}{dz} = 2z;$

$$y = \int 2 z^8\, dz = \frac{2}{9} z^9 = \frac{2}{9} \sqrt{x^9} + C.$$

6. Beispiel: $y = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1};\ \frac{x}{a} = z;\ \frac{dx}{dz} = a.$

$$y = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

7. Beispiel: $y = \int \sin 2x\, dx;\ 2x = z;\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2};$

$$y = \frac{1}{2} \int \sin z\, dz = -\frac{1}{2} \cos z = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Nicht minder wichtig als die Substitutionsmethode ist die Methode der theilweisen Integration. Sind u und v zwei Funktionen von x, so ist:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx \qquad (17)$$

Der Sinn dieser Formel ist folgender: Hat man ein Produkt aus zwei Factoren, welche beide Funktionen von x sind, zu integriren, und ist einer dieser Factoren einfach integrirbar, so betrachtet man diesen als erste Ableitung einer Funktion v und nennt ihn $\frac{dv}{dx}$. Nachdem man durch Integration dieses Factors die Funktion v gefunden hat, zieht man von dem Produkt u v ab: $\int v \frac{du}{dx} dx$. Eine kürzere Schreibeform für (17) ist die folgende:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

1. Beispiel: $\int x \cos x\, dx = \int x \frac{d(\sin x)}{dx} dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$

2. Beispiel : $\int \lg x \, x \, dx = \int \lg x \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{dx} dx = \frac{x^2}{2} \lg x$
$- \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \lg x - \frac{x^2}{4} + C.$

3. Beispiel : $\int x^4 e^x . dx = \int x^4 \frac{d(e^x)}{dx} dx = x^4 e^x - \int 4 e^x x^3 dx$

$4 \int x^3 e^x dx = 4 x^3 e^x - 4.3 \int x^2 e^x dx$

$4.3 \int x^2 e^x dx = 4.3 x^2 e^x - 4.3.2 \int x e^x dx$

$4.3.2 \int x e^x dx = 4.3.2 x e^x - 4.3.2 \int e^x dx$

$$\int x^4 e^x dx = (x^4 - 4x^3 + 4.3 x^2 - 4.3.2 x + 4.3.2) e^x + C.$$

4. Beispiel : $\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = A$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = B$$

$A = e^x \sin x - B, \quad B = e^x \cos x + A$

$A = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x), \quad B = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$

5. Beispiel : $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \frac{d(\sin x)}{dx} dx = \cos x \sin x$
$+ \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx; \quad 2 \int \cos^2 x \, dx$
$= \sin x \cos x + \int dx.$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C.$$

6. Beispiel : $\int x^3 (\lg x)^2 dx = \frac{x^4}{4} (\lg x)^2 - \frac{1}{2} \int x^3 \lg x \, dx$

$\int x^3 \lg x \, dx = \frac{x^4}{4} \lg x - \frac{1}{4} \int x^3 dx$

$\int x^3 (\lg x)^2 dx = \frac{x^4}{4} \left[(\lg x)^2 - \frac{1}{2} \lg x + \frac{1}{8} \right] + C.$

7. Beispiel : $y = \int \arcsin x \, dx$, $z = \arcsin x$, oder $x = \sin z$,
$dx = \cos z \, dz$, $y = \int z \cos z \, dz = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z$
$+ \cos z.$

$$\int \text{arc sin } x\,dx = x \text{ arc sin } x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

§ 2. Einfache Beispiele zur Integration.

1. $\int 7\,x^4\,dx = \frac{7\,x^5}{5}$

2. $\int \frac{2}{3x^5}\,dx = -\frac{1}{6x^4}$

3. $\int (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.)\,dx = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4} + \ldots.$

4. $\int \left(x^3 + 5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 3x^2 + 3x - 2 \lg x - \frac{5}{x} + \frac{7}{2x^2}$

5. $\int (a + b\,x^3)^2\,dx = a^2\,x + \frac{a\,b\,x^4}{2} + \frac{b^2\,x^7}{7}$

6. $\int (1 - 3x + 5x^2)^2\,dx = x - 3x^2 + \frac{19x^3}{3} - \frac{15x^4}{2} + 5x^5$

7. $\int \frac{\left(\frac{3}{4}x^2 - 1\right)^3 dx}{x} = \frac{9}{128}x^6 - \frac{27}{64}x^4 + \frac{9}{8}x^2 - \lg x$

8. $\int 4\sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{12}{5}\sqrt[3]{x^5}$

9. $\int \frac{a}{\sqrt[4]{5x^3}}\,dx = 4a\sqrt[4]{\frac{x}{5}}$

10. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{8}{17}\sqrt[12]{125\,x^{17}}$

11. $\int (3 + 2\sqrt[4]{x})^3\,dx = 27x + \frac{216}{5}\sqrt[4]{x^5} + 24\sqrt{x^3} + \frac{32}{7}\sqrt[4]{x^7}$

12. $\int \frac{3 + 5 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx = - \frac{6}{\sqrt{x}} + 30 \sqrt[6]{x}$

13. $\int \frac{m}{a + b x} dx = \frac{m}{b} \lg (a + b x)$

14. $\int \frac{3}{2 - 4x} dx = - \frac{3}{4} \lg (2 - 4 x)$

15. $\int \frac{x^{n-1}}{a + b x^n} dx = \frac{1}{n b} \lg (a + b x^n)$

16. $\int \frac{- 10 x^3 + 17 x^2 - 28 x + 12}{1 - 5 x} dx = \frac{2 x^3}{3} - \frac{3 x^2}{2} + 5 x - \frac{7}{5} \lg (1 - 5 x)$

17. $\int \frac{18 x^8 - 27 x^7 + 6 x^5 - 9 x^4 + 4 x^2}{9 x^3 + 3} dx = \frac{x^6}{3} - \frac{3 x^5}{5} + \frac{4}{27} \lg (3 + 9 x^3)$

18. $\int \frac{5}{2 + \sqrt{x}} dx = 10 \sqrt{x} - 20 \lg (2 + \sqrt{x})$

19. $\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + x - 2 \sqrt{x} + 2 \lg (1 + \sqrt{x})$

20. $\int \frac{x + a}{x + b} dx = \int \left(1 + \frac{a - b}{x + b}\right) dx = x + (a - b) \lg (x + b)$

21. $\int \frac{2 x^3 + 7 x^2 + 4 x + 2}{2 x + 3} dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{5}{2} \lg (2 x + 3)$

§ 3. Integration rationaler gebrochener Funktionen.

a. Alle Wurzeln des Nenners sind verschieden.

$$\frac{\varphi (x)}{f (x)} = \frac{a x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_p}{x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_q} \quad (18)$$

Wenn ein Bruch von vorstehender Form integrirt werden soll, so mufs man denselben zuerst in Partialbrüche zerlegen. Diese Zerlegung ist aber nur möglich, wenn $m < n$ ist, und daher mufs, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, durch Division die ganze Funktion G (x) ausgeschieden und der gegebene Bruch auf die Form gebracht werden :

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = G(x) + \frac{\psi(x)}{f(x)}$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $f(x) = o$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_n$, gleichviel ob dieselben reell oder complex sind, so können wir setzen :

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots . + \frac{A_k}{x-\alpha_k} + \ldots . + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \quad (19)$$

Um nun die einzelnen Zähler, z. B. A_k zu finden, bringen wir (19) auf die Form :

$$\frac{\psi(x)}{\left[\frac{f(x)}{x-\alpha_k}\right]} = \left[\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots . + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right](x-\alpha_k) + A_k,$$

setzen $x = \alpha_k$ und erhalten :

$$\frac{\psi(\alpha_k)}{\left[\frac{f(x)}{x-\alpha_k}\right]_{x=\alpha_k}} = A_k$$

Da $(x-\alpha_k)$ ein Factor von $f(x)$ ist, so erscheint der Nenner dieses Werthes in der unbestimmten Form $\frac{o}{o}$, und wir müssen, um den Werth zu erhalten, zuerst Zähler und Nenner differenziren und dann $x = \alpha_k$ setzen. Mithin ist :

$$\left[\frac{f(x)}{x-\alpha_k}\right]_{x=\alpha_k} = \left[\frac{f'(x)}{1}\right]_{x=\alpha_k} = f'(\alpha_k) \text{ und}$$

$$A_k = \frac{\psi(\alpha)_k}{f'(\alpha)_k} \quad (20)$$

Beispiel : $\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{7x^2 + 7x - 176}{x^3 - 9x^2 + 6x + 56}$

$\alpha_1 = -2$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 7$.

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-4} + \frac{A_3}{x-7}$$

$$A_1 = \frac{\psi(-2)}{f'(-2)} = -3; \; A_2 = \frac{\psi(4)}{f'(4)} = 2; \; A_3 = \frac{\psi(7)}{f'(7)} = 8$$

$$\frac{7x^2 + 7x - 176}{x^3 - 9x^2 + 6x + 56} = \frac{-3}{x+2} + \frac{2}{x-4} + \frac{8}{x-7}$$

$$\int \frac{7x^2 + 7x - 176}{x^3 - 9x^2 + 6x + 56} dx = -3 \lg(x+2) + 2 \lg(x-4) + 8 \lg(x-7)$$

Da häufig der Werth von $\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . a_n$ berechnet werden mufs, wenn man $x = \alpha$ setzt, so theilen wir hier ein Verfahren mit, das einfacher ist, als das gewöhnliche. Um $\varphi(\alpha)$ zu finden, schreibt man die Coëfficienten von $\varphi(x)$ von a_0 bis a_n in eine Reihe, indem man die Coëfficienten der fehlenden Glieder durch Null ersetzt.

a_0	a_0	(I)
a_1	$a_0 \alpha + a_1$	(II)
a_2	$a_0 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_2$	(III)
a_3	$a_0 \alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3$	(IV)
a_n	$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$	

(21)

Nun setzt man in Reihe (I) nochmals a_0, in Reihe (II): $a_0 \alpha + a_1$; in (III): $(a_0 \alpha + a_1) \alpha + a_2 = a_0 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_2$; in (IV): $(a_0 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_2) \alpha + a_3$, d. h. man bildet die Werthe einer solchen Reihe, indem man die Glieder der vorhergehenden Reihe mit α multiplicirt und den Coëfficient der zu bildenden Reihe addirt. Die letzte Reihe ist der gesuchte Werth $\varphi(x)$. Bei Zahlencoëfficienten ist es bequemer, dieselben in horizontale Reihe zu setzen.

1. Beispiel: $\varphi(x) = 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 10x + 8 = ?$ für $x = 3$.

5	7	—2	—10	8
5	22	64	162	554

$22 = 5 . 3 + 7$; $64 = 22 . 3 - 2$; $182 = 64 . 3 - 10$; $554 = 182 . 3 + 8 = \varphi(3)$.

2. Beispiel : $\varphi(x) = 3x^4 - 7x^2 + 12 = ?$ für $x = -4$.

3	0	—7	0	12
3	—12	41	— 164	668

$-12 = 3 . -4 + 0$; $41 = -12 . -4 - 7$; $-164 = 41 . -4 + 0$; $668 = -164 . -4 + 12 = \varphi(-4)$.

22. $\int \frac{5x^2 - 7x + 13}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx = \int \left(\frac{\frac{11}{2}}{x-1} + \frac{-19}{x-2} + \frac{\frac{37}{2}}{x-3} \right) dx$
$= \frac{11}{2} \lg(x-1) - 19 \lg(x-2) + \frac{37}{2} \lg(x-3)$

23. $\int \frac{x^2 + 5x + 41}{(x+3)(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)} dx = \frac{5}{2} \lg(x+3)$
$+ \frac{47}{2} \lg(x-1) - 25 \lg\left(x - \frac{1}{2}\right)$

24. $\int \frac{dx}{x^3 - a^2 x} = \frac{1}{2a^2} \lg(x^2 - a^2) - \frac{1}{a^2} \lg x$

25. $\int \frac{10x^3 + 40x^2 + 40x + 6}{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x} = \lg x + 2 \lg(x+1)$
$+ 3 \lg(x+2) + 4 \lg(x+3)$

26. $\int \frac{17x^2 - x - 26}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} dx = \frac{5}{3} \lg(x-1)$
$- \frac{4}{3} \lg(x+1) + \frac{10}{3} \lg(x-2) - \frac{11}{3} \lg(x+2)$

27. $\int \frac{4x^3 + 9x^2 - 270x + 653}{(x-3)(x-4)(x-7)(x+5)} dx = \lg(x^2 - 7x + 12)$
$+ 4 \lg(x-7) - 2 \lg(x+5)$

28. $\int \frac{2x^4 - 10x^3 + 21x^2 - 20x + 5}{x^2 - 3x + 2} dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x$
$+ \lg(x-2) + 2\lg(x-1)$

29. $\int \frac{x^5 - 47x^3 + 119x^2 - 95x + 284}{x^2 + 5x - 24} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3}$
$+ x^2 - 11x + 4\lg(x^2 + 5x - 24)$

30. $\int \frac{x^2 - 3x + 3}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} dx = \frac{13}{21} \lg(x+2) + \frac{13}{28} \lg(x-5)$
$- \frac{1}{12} \lg(x-1)$

31. $\int \frac{5x^2 - 7ax + 11a^2}{x^3 - 6ax^2 + 11a^2x - 6a^3} dx = \frac{9}{2} \lg(x-a) - 17 \lg(x-2a)$
$+ \frac{35}{2} \lg(x-3a)$

32. $\int \frac{2x^3 + 12ax^2 - 8a^2x - 12a^3}{(x^2 - a^2)(x^2 - 4a^2)} dx = \lg(x^2 - a^2)$
$+ 3 \lg \frac{x - 2a}{x + 2a}$

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + 2ax + b} dx$$

Sind die beiden Wurzeln von $x^2 + 2ax + b = o$ reell und durch α und β bezeichnet, so ist:

$$\frac{mx + n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta}}{x - \alpha} - \frac{\frac{m\beta + n}{\alpha - \beta}}{x - \beta}$$

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + 2ax + b} dx = \int \frac{mx + n}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx =$$
$$\frac{(m\alpha + n)\lg(x-\alpha) - (m\beta + n)\lg(x-\beta)}{(\alpha - \beta)} \qquad (22)$$

33. $\int \frac{x + 13}{x^2 - 4x - 5} dx = 3\lg(x-5) - 2\lg(x+1)$

34. $$\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1} dx = 5 \lg\left(x+\frac{1}{2}\right) - 4 \lg(x+1)$$

35. $$\int \frac{6x-13}{x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}} dx = 2 \lg(x-3) + 4 \lg\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

36. $$\int \frac{\frac{5}{6}x-16}{x^2+3x-18} dx = \frac{7}{3} \lg(x+6) - \frac{3}{2} \lg(x-3)$$

37. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \lg \frac{x-a}{x+a}$$

38. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{x^2-(ai)^2} = \frac{1}{2ai} \lg \frac{x-ai}{x+ai} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{1}{a} dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C_1$$

Durch Vergleich dieser beiden Resultate entsteht:

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{x-ai}{x+ai} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C_1 - C$$

Um den Werth der Constanten zu erhalten, setze man $x=o$, $\lg(-1)=(1+2k)i\pi$ und finde: $C_1 - C = \frac{\pi}{2}(1+2m)$. Beim Gebrauch dieser Formel zur Umwandlung von Integralformen können wir die Constante dieses Ausdrucks in die allgemeine Constante des Integrals aufnehmen. Setzen wir dann noch $x-p$ statt x und q statt a, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{x-p-qi}{x-p+qi} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-p}{q} \tag{23}$$

Sind in (22) die Wurzeln complexe Gröfsen, und ist $\alpha = p+iq$, so mufs $\beta = p-iq$ sein. Die Formel geht dann über in die folgende:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b} dx = \int \frac{mx+n}{(x-p-iq)(x-p+iq)} dx$$

$$= \frac{[m(p+iq)+n] \lg(x-p-iq) - [m(p-iq)+n] \lg(x-p+iq)}{2iq}$$

$$= \frac{mp+n}{q} \cdot \frac{1}{2i} \lg \frac{x-p-iq}{x-p+iq} + \frac{m}{2} \lg(x-p-iq)(x-p+iq)$$

$$\int\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}dx=\int\frac{mx+n}{(x-p-iq)(x-p+iq)}dx=\frac{mp+n}{q}\text{arc tg}\frac{x-p}{q}$$
$$+\frac{m}{2}\lg(x^2+2ax+b) \qquad (24)$$

39. $\int\frac{2x-10}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{2x-10}{(x+1-3i)(x+1+3i)}dx$
$=\lg(x^2+2x+10)-4\,\text{arc tg}\frac{x+1}{3}$

40. $\int\frac{3x+4}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{2}\lg(x^2+4x+8)-\text{arc tg}\frac{x+2}{2}$

41. $\int\frac{x+6}{x^2-3}dx=\frac{1}{2}\lg(x^2-3)+\sqrt{3}\lg\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$

42. $\int\frac{x+6}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\lg(x^2+3)+\frac{6}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{3}}$

43. $\int\frac{6x}{x^2+4x+13}dx=3\lg(x^2+4x+13)-4\,\text{arc tg}\frac{x+2}{3}$

44. $\int\frac{10x-44}{x^2-4x+20}dx=5\lg(x^2-4x+20)-6\,\text{arc tg}\frac{x-2}{4}$

45. $\int\frac{x^2}{5x^2+12}dx=\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}\sqrt{60}\,\text{arc tg}\,x\sqrt{\frac{5}{12}}$

46. $\int\frac{4x-5}{x^2-6x+10}dx=2\lg(x^2-6x+10)+7\,\text{arc tg}(x-3)$

47. $\int\frac{8x+7}{9x^2-6x+37}dx=\frac{4}{9}\lg(9x^2-6x+37)$
$+\frac{29}{54}\text{arc tg}\frac{3x-1}{6}$

48. $\int\frac{27x^6}{3x^2+2}dx=\frac{9x^5}{5}-2x^3+4x-\frac{8}{\sqrt{6}}\text{arc tg}\,x\sqrt{\frac{3}{2}}$

Wenn in (22) $\alpha=\beta$ wird, so ist die Formel unbrauchbar. Man setzt dann $x-\alpha=\frac{1}{y}$ und erhält:

$$\int\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2}dx=\int\left(-\frac{m}{y}-(m\alpha+n)\right)dy=-m\lg y$$
$$-(m\alpha+n)y=m\lg(x-\alpha)-\frac{m\alpha+n}{x-\alpha} \qquad (25)$$

49. $\int \frac{2x - 13}{(x-5)^2} dx = 2 \lg (x - 5) + \frac{3}{x-5}$.

50. $\int \frac{\frac{1}{2} x + \frac{5}{4}}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \lg \left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{13}{8\left(x - \frac{3}{4}\right)}$.

Ist der Nenner eines Bruches vom dritten Grad, so wird die allgemeine Integrationsformel schon ziemlich complicirt. Es ist dann:

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{a x^2 + b x + c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

$$A = \frac{\psi(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \quad B = \frac{\psi(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}, \quad C = \frac{\psi(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$\int \frac{a x^2 + b x + c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} dx = A \lg (x-\alpha) + B \lg (x-\beta) + C \lg (x-\gamma) \qquad (26)$$

51. $\int \frac{5x^2 - 7x + 3}{(x-2)(x-4)(x-7)} dx = \frac{9}{10} \lg (x-2) - \frac{55}{6} \lg (x-4) + \frac{199}{15} \lg (x-7)$.

Werden in (26) die beiden Wurzeln β und γ complex und $\beta = p + i q$, $\gamma = p - i q$, so wird $A = \frac{\psi(\alpha)}{(\alpha - p)^2 + q^2}$, d. h. reell, während B und C complex werden. Statt nun nach (26) zu integriren und dann nach (23) zu transformiren, zieht man besser den gefundenen Partialbruch $\frac{A}{x-\alpha}$ von dem gegebenen Bruch ab und erhält so einen Bruch von quadratischem Nenner, dessen Zählercoëfficienten man leicht finden kann, z. B.:

$$\frac{8x^2 - 29x + 61}{(x-1)(x^2 - 6x + 13)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{m x + n}{x^2 - 6x + 13}$$

$$A = \left[\frac{8x^2 - 29x + 61}{x^2 - 6x + 13}\right]_{x=1} = 5$$

$$\frac{8x^2 - 29x + 61}{(x-1)(x^2 - 6x + 31)} = \frac{5}{(x-1)} + \frac{m x + n}{x^2 - 6x + 13}$$

Macht man die rechte Seite gleichnamig, so kann man die beiden Zähler gleich setzen und nach dem Satz der unbestimmten Coëfficienten m und n bestimmen. Man findet $m = 3$, $n = 4$.

52. $$\int \frac{8x^2 - 29x + 61}{(x-1)(x^2-6x+13)} dx = 5 \lg (x-1) + \frac{3}{2} \lg (x^2 - 6x + 13) + \frac{13}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-3}{2}$$

53. $$\int \frac{15x^2 + 66x + 21}{(x-1)(x^2+4x+29)} dx = 3 \lg (x-1) + 6 \lg (x^2 + 4x + 29) + \frac{42}{5} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+2}{5}$$

54. $$\int \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} dx = \frac{4}{7} \lg (x-2) + \frac{17}{14} \lg (x^2 + 3) - \frac{1}{7\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{3}}$$

55. $$\int \frac{7x^2 + 6x - 16}{(x-3)(x^2+4)} dx = 5 \lg (x-3) + \lg (x^2 + 4) + 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}$$

56. $$\int \frac{9x^2 - \frac{31}{3}x - \frac{65}{3}}{\left(x + \frac{5}{3}\right)\left(x^2 + 9x + \frac{90}{4}\right)} dx = 2 \lg \left(x + \frac{5}{3}\right) + \frac{7}{2} \lg \left(x^2 + 9x + \frac{90}{4}\right) - \frac{143}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+9}{10}$$

Kommen in (19) complexe Wurzelpaare vor, so werden dennoch die Zähler der Partialbrüche nach (20) bestimmt, die Partialbrüche selbst integrirt und diese logarithmischen Integrale mittelst der Formel (23) transformirt.

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{2x}{(x-i)(x+i)(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})}$$
$$= \frac{A_1}{x-i} + \frac{A_2}{x+i} + \frac{A_3}{x-i\sqrt{3}} + \frac{A_4}{x+i\sqrt{3}}$$

$$A_1 = \frac{\psi(i)}{f'(i)} = \frac{1}{2}; \quad A_2 = \frac{\psi(-i)}{f'(-i)} = \frac{1}{2}; \quad A_3 = \frac{\psi(i\sqrt{3})}{f'(i\sqrt{3})} = -\frac{1}{2};$$
$$A_4 = \frac{\psi(-i\sqrt{3})}{f'(-i\sqrt{3})} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-i} + \frac{\frac{1}{2}}{x+i} - \frac{\frac{1}{2}}{x-i\sqrt{3}} - \frac{\frac{1}{2}}{x+i\sqrt{3}}$$

57. $$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \frac{1}{2}\,[\lg(x-i) + \lg(x+i)] - \frac{1}{2}\,[\lg(x-i\sqrt{3}) + \lg(x+i\sqrt{3})] = \frac{1}{2}\lg\frac{x^2+1}{x^2+3}$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)} = \frac{A_1}{x-2-5i} + \frac{A_2}{x-2+5i} + \frac{A_3}{x-1-2i} + \frac{A_4}{x-1+2i}$$

$$A_1 = \frac{\psi(2+5i)}{f'(2+5i)} = 2-3i; \quad A_2 = \frac{\psi(2-5i)}{f'(2-5i)} = 2+3i;$$

$$A_3 = \frac{\psi(1+2i)}{f'(1+2i)} = 3-4i; \quad A_4 = \frac{\psi(1-2i)}{f'(1+2i)} = 3+4i;$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{2-3i}{x-2-5i} + \frac{2+3i}{x-2+5i} + \frac{3-4i}{x-1-2i} + \frac{3+4i}{x-1+2i}$$

$$\int \frac{\psi(x)}{f(x)}\,dx = (2-3i)\lg(x-2-5i) + (2+3i)\lg(x-2+5i) + (3-4i)\lg(x-1-2i) + (3+4i)\lg(x-1+2i)$$
$$= 2\lg(x-2-5i)(x-2+5i) + 3\lg(x-1-2i)(x-1+2i) - 3i\lg\frac{x-2-5i}{x-2+5i} - 4i\lg\frac{x-1-2i}{x-1+2i}$$

58. $$\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}\,dx = 2\lg(x^2-4x+29) + 3\lg(x^2-2x+5) + 6\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-2}{5} + 8\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-1}{2}$$

59. $$\int \frac{2x^3+28x^2-257x+531}{(x^2-16x+69)(x^2-6x+16)}\,dx = \frac{5}{2}\lg(x^2-16x+69) + \frac{43}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-8}{\sqrt{5}} - \frac{3}{2}\lg(x^2-6x+16) - \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-3}{\sqrt{7}}$$

60. $$\int \frac{16x^3-62x^2+244x-130}{(x^2-4x+20)(x^2-2x+2)}\,dx = 3\lg(x^2-4x+20) + 5\lg(x^2-2x+2) + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-2}{4} + 4\,\mathrm{arc\,tg}\,(x-1)$$

$$\int \frac{\psi(x)}{x^n - 1}\, dx$$

Um diesen Bruch in Partialbrüche zu zerlegen, müssen wir zuerst die Gleichung $x^n - 1 = o$ auflösen, oder die verschiedenen Werthe von $x = \sqrt[n]{1}$ finden. Da $1 = \cos 2 k \pi + i \sin 2 k \pi$ ist, indem man sich unter k eine beliebige ganze Zahl zu denken hat, so ist nach dem Lehrsatz von Moivre:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \tag{27}$$

Wir setzen $k = o$, $k = 1$, $k = 2$ u. s. w. bis $k = (n-1)$, bezeichnen durch w_0, w_1, w_2 u. s. w. die zugehörigen Wurzelwerthe und erhalten: $w_0 = 1$; $w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$; $w_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}$; $w_3 = \cos \frac{6\pi}{n} + i \sin \frac{6\pi}{n}$ u. s. w.; $w_{n-1} = \cos \frac{(n-1)2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)2\pi}{n}$.

Da nun wieder nach Moivre $\cos n\varphi + i \sin n\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ ist, so mufs $\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^2$, oder $w_2 = (w_1)^2$ sein. Ebenso ist $\cos \frac{6\pi}{n} + i \sin \frac{6\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^3$, od. $w_3 = (w_1)^3$; $\cos \frac{8\pi}{n} + i \sin \frac{8\pi}{n} = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)^4$, oder $w_4 = (w_1)^4$ u. s. w. Setzen wir daher $w_1 = \varepsilon$, so ist $w_2 = \varepsilon^2$, $w_3 = \varepsilon^3$, $w_4 = \varepsilon^4$ u. s. w.

1. Beispiel: $x = \sqrt[3]{1}$; $w_0 = \cos o + i \sin o = 1$; $w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = (w_1)^2$.

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-i} + \frac{\frac{1}{2}}{x+i} - \frac{\frac{1}{2}}{x-i\sqrt{3}} - \frac{\frac{1}{2}}{x+i\sqrt{3}}$$

57. $$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \frac{1}{2}\left[\lg(x-i) + \lg(x+i)\right] - \frac{1}{2}\left[\lg(x-i\sqrt{3}) + \lg(x+i\sqrt{3})\right] = \frac{1}{2}\lg\frac{x^2+1}{x^2+3}$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)} = \frac{A_1}{x-2-5i} + \frac{A_2}{x-2+5i} + \frac{A_3}{x-1-2i} + \frac{A_4}{x-1+2i}$$

$$A_1 = \frac{\psi(2+5i)}{f'(2+5i)} = 2-3i;\quad A_2 = \frac{\psi(2-5i)}{f'(2-5i)} = 2+3i;$$

$$A_3 = \frac{\psi(1+2i)}{f'(1+2i)} = 3-4i;\quad A_4 = \frac{\psi(1-2i)}{f'(1+2i)} = 3+4i;$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{2-3i}{x-2-5i} + \frac{2+3i}{x-2+5i} + \frac{3-4i}{x-1-2i} + \frac{3+4i}{x-1+2i}$$

$$\int \frac{\psi(x)}{f(x)}\,dx = (2-3i)\lg(x-2-5i) + (2+3i)\lg(x-2+5i) + (3-4i)\lg(x-1-2i) + (3+4i)\lg(x-1+2i)$$
$$= 2\lg(x-2-5i)(x-2+5i) + 3\lg(x-1-2i)(x-1+2i) - 3i\lg\frac{x-2-5i}{x-2+5i} - 4i\lg\frac{x-1-2i}{x-1+2i}$$

58. $$\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}\,dx = 2\lg(x^2-4x+29) + 3\lg(x^2-2x+5) + 6\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{5} + 8\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}$$

59. $$\int \frac{2x^3+28x^2-257x+531}{(x^2-16x+69)(x^2-6x+16)}\,dx = \frac{5}{2}\lg(x^2-16x+69) + \frac{43}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-8}{\sqrt{5}} - \frac{3}{2}\lg(x^2-6x+16) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{\sqrt{7}}$$

60. $$\int \frac{16x^3-62x^2+244x-130}{(x^2-4x+20)(x^2-2x+2)}\,dx = 3\lg(x^2-4x+20) + 5\lg(x^2-2x+2) + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{4} + 4\operatorname{arc\,tg}(x-1)$$

$$\int \frac{\psi(x)}{x^n - 1} dx$$

Um diesen Bruch in Partialbrüche zu zerlegen, müssen wir zuerst die Gleichung $x^n - 1 = o$ auflösen, oder die verschiedenen Werthe von $x = \sqrt[n]{1}$ finden. Da $1 = \cos 2 k \pi + i \sin 2 k \pi$ ist, indem man sich unter k eine beliebige ganze Zahl zu denken hat, so ist nach dem Lehrsatz von Moivre:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2 k \pi}{n} + i \sin \frac{2 k \pi}{n} \qquad (27)$$

Wir setzen $k = o$, $k = 1$, $k = 2$ u. s. w. bis $k = (n-1)$, bezeichnen durch w_0, w_1, w_2 u. s. w. die zugehörigen Wurzelwerthe und erhalten: $w_0 = 1$; $w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$; $w_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}$; $w_3 = \cos \frac{6\pi}{n} + i \sin \frac{6\pi}{n}$ u. s. w.; $w_{n-1} = \cos \frac{(n-1) 2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1) 2\pi}{n}$.

Da nun wieder nach Moivre $\cos n \varphi + i \sin n \varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ ist, so mufs $\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^2$, oder $w_2 = (w_1)^2$ sein. Ebenso ist $\cos \frac{6\pi}{n} + i \sin \frac{6\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^3$, od. $w_3 = (w_1)^3$; $\cos \frac{8\pi}{n} + i \sin \frac{8\pi}{n} = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)^4$, oder $w_4 = (w_1)^4$ u. s. w. Setzen wir daher $w_1 = \varepsilon$, so ist $w_2 = \varepsilon^2$, $w_3 = \varepsilon^3$, $w_4 = \varepsilon^4$ u. s. w.

1. Beispiel: $x = \sqrt[3]{1}$; $w_0 = \cos o + i \sin o = 1$; $w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = (w_1)^2$.

2. Beispiel : $x = \sqrt[4]{1}$; $w_0 = 1$; $w_1 = i$; $w_2 = i^2 = -1$; $w_3 = (w_1)^3 = i^3 = -i$.

3. Beispiel : $x = \sqrt[6]{1}$; $w_0 = 1$; $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_3 = -1$; $w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_5 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

Nachdem wir so die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = o$ gefunden, setzen wir :

$$\frac{\psi(x)}{x^n-1} = \frac{A_0}{x-1} + \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^2} + \frac{A_3}{x-\varepsilon^3} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-\varepsilon^{n-1}}$$

bestimmen die Zähler A nach (20) und erhalten :

$$A_k = \left[\frac{\psi(x)}{n\,x^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^k} = \left[\frac{x\,\psi(x)}{n\,x^n}\right]_{x=\varepsilon^k} = \frac{\varepsilon^k\,\psi(\varepsilon^k)}{n}$$

$$\frac{\psi(x)}{x^n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{\psi(1)}{x-1} + \frac{\varepsilon\,\psi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\psi(\varepsilon^2)}{x-\varepsilon^2} + \ldots\ldots \frac{\varepsilon^{n-1}\psi(\varepsilon^{n-1})}{x-\varepsilon^{n-1}}\right]$$

$$\int\frac{\psi(x)}{x^n-1}\,dx = \frac{1}{n}\,[\psi(1)\lg(x-1) + \varepsilon\,\psi(\varepsilon)\lg(x-\varepsilon) + \varepsilon^2\,\psi(\varepsilon^2)\lg(x-\varepsilon^2) + \ldots\ldots \varepsilon^{n-1}\,\psi(\varepsilon^{n-1})\lg(x-\varepsilon^{n-1})] \quad (28)$$

61. $$\int\frac{a\,x^2 + b\,x + c}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\left[(a+b+c)\lg(x-1) + \frac{1}{2}(2a-b-c)\lg(x^2+x+1) + (b-c)\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

62. $$\int\frac{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}{x^4-1}\,dx = \frac{a+c}{4}\lg(x^2-1) + \frac{a-c}{4}\lg(x^2+1) + \frac{b+d}{4}\lg\frac{x-1}{x+1} + \frac{b-d}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x$$

Man kann diese Aufgabe auch so behandeln :

$$\frac{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}{x^4-1} = \frac{Mx+N}{x^2-1} + \frac{Px+Q}{x^2+1}$$

Nach dem Satz der unbestimmten Coëfficienten ist $M = \frac{a+c}{2}$, $N = \frac{b+d}{2}$, $P = \frac{a-c}{2}$, $Q = \frac{b-d}{2}$. Die beiden Theile werden nach (22) und (24) weiter ausgeführt.

63. $\int \frac{x^2-3x}{x^4-1}\,dx = \frac{3}{4}\lg\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4}\lg\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$

64. $\int \frac{x}{x^6-1}\,dx = \frac{1}{6}\Big[\lg(x-1) + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\lg\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$
$-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\lg\left(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) + \lg(x+1) + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$
$\cdot\lg\left(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\lg\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\Big]$
$= \frac{1}{6}\Big[\lg(x^2-1) - \frac{1}{2}\lg(x^4+x^2+1) - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$
$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big]$

$$\int \frac{\psi(x)}{x^n+1}\,dx$$

$x^n+1=o$ gibt $x=\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{\cos(1+2k)\pi+i\sin(1+2k)\pi}$;

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\left(\frac{1+2k}{n}\right)\pi + i\sin\left(\frac{1+2k}{n}\right)\pi. \tag{28}$$

$w_0 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$; $w_1 = \cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}$; $w_2 = \cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}$ u. s. w. Wieder ist $w_1 = (w_0)^3$; $w_2 = (w_0)^5$; $w_3 = (w_0)^7$ u. s. w., und daher, wenn $w_0 = \varepsilon$, ist $w_1 = \varepsilon^3$; $w_2 = \varepsilon^5$; $w_3 = \varepsilon^7$ u. s. w.

1. Beispiel: $x = \sqrt[3]{-1} = \cos\left(\frac{1+2k}{3}\right)\pi + i\sin\left(\frac{1+2k}{3}\right)\pi$;
$w_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $w_1 = -1$; $w_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

2. Beispiel: $x = \sqrt[4]{-1} = \cos\left(\frac{1+2k}{4}\right)\pi + i\sin\left(\frac{1+2k}{4}\right)\pi$;
$w_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$; $w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$; $w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$; $w_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Wird gesetzt:

$$\frac{\psi(x)}{x^n+1} = \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^3} + \frac{A_3}{x-\varepsilon^5} + \ldots + \frac{A_n}{x-\varepsilon^{2n-1}}$$

so ist:

$$A_k = \left[\frac{\psi(x)}{n x^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = \left[\frac{x\psi(x)}{n x^n}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = -\frac{1}{n}\varepsilon^{2k-1}\psi(\varepsilon^{2k-1});$$

$$\frac{\psi(x)}{x^n+1} = -\frac{1}{n}\left[\frac{\varepsilon\psi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3\psi(\varepsilon^3)}{x-\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^5\psi(\varepsilon^5)}{x-\varepsilon^5} + \ldots\ldots \frac{\varepsilon^{2n-1}\psi(\varepsilon^{2n-1})}{x-\varepsilon^{2n-1}}\right]$$

$$\int\frac{\psi(x)}{x^n+1}dx = -\frac{1}{n}[\varepsilon\psi(\varepsilon)\lg(x-\varepsilon) + \varepsilon^3\psi(\varepsilon^3)\lg(x-\varepsilon^3) + \ldots \ldots + \varepsilon^{2n-1}\psi(\varepsilon^{2n-1})\lg(x-\varepsilon^{2n-1})] \quad (29)$$

65. $$\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+1}dx = 2\lg(x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

66. $$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\Big[(a-b+c)\lg(x+1) + \frac{1}{2}(2a+b-c)\lg(x^2-x+1) + (b+c)\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big]$$

67. $$\int\frac{x^2}{x^4+1}dx = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1) - \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1)\right]$$

68. $$\int\frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\lg(x^4+1)$$

69. $$\int\frac{dx}{x^6-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\left[\lg\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\lg\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

70. $$\int\frac{x^5+x^2+4}{x^6+1}dx = -\frac{1}{6}\left[-\lg(x^6+1) + 2\sqrt{3}\lg\frac{(2x-\sqrt{3})^2+1}{(2x+\sqrt{3})^2+1} - 6\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3-2x}{2x^2-1}\right]$$

b. Mehrere Wurzeln von $f(x) = o$ sind gleich.

Wenn der Nenner gleiche Factoren besitzt, so wird der Bruch nach folgender Formel in Partialbrüche zerlegt :

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-\alpha)^{n-1}} + \dots\dots\dots\dots + \frac{A_1}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{B_p}{(x-\beta)^p} + \frac{B_{p-1}}{(x-\beta)^{p-1}} + \dots \frac{B_1}{(x-\beta)} + \dots\dots\dots$$
$$+ \frac{L}{(x-\lambda)} + \frac{M}{(x-\mu)} + \dots\dots + \frac{T}{(x-\tau)} \qquad (30)$$

Die Zähler L, M, ... T, deren Nenner nur auf der ersten Potenz vorkommen, werden wie früher nach (20) bestimmt; dagegen werden die übrigen Zähler auf folgende Weise ermittelt :

Um z. B. die A zu finden, bringt man (30) auf die Form:

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^n \cdot \varphi(x)} = \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-\alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)}$$
$$+ \frac{\varrho(x)}{\varphi(x)} \qquad (31)$$

Der letzte Theil ist hiernach die Summe aller Partialbrüche, die nicht $(x-\alpha)$ zum Nenner haben. Setzt man nun $x - \alpha = \frac{1}{y}$, oder $x = \frac{1+\alpha y}{y}$, so geht (31) über in :

$$\frac{y^n \psi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)} = A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \dots\dots + A_1 y$$
$$+ \frac{\varrho\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)} \qquad (32)$$

Die Funktionen φ, ψ und ϱ haben die Eigenthümlichkeit, dafs, wenn man ihre Theile gleichnamig macht und addirt, y in Zähler und Nenner auf gleich hoher Potenz vorkommt; ist z. B. y^p der Nenner von ψ, so ist y^p auch die höchste Potenz des Zählers. Dies hat zur Folge, dafs der Quotient von $y^n \psi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$ durch $\varphi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$ Glieder ent-

halten mufs von y auf der n^{ten} Potenz bis herab zu y auf der ersten Potenz. Eine weitere Folge hiervon ist die, dafs der Quotient von $\varrho\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$ durch $\varphi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$ keine positiven Potenzen von y enthalten kann; mithin mufs der Ausdruck $A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots + A_1 y$ der Theil des Quotienten von $y^n \psi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$ durch $\varphi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$ sein, welcher nur die positiven Potenzen von y enthält. Führen wir daher in (32) die Division auf der linken Seite aus, so gewinnen wir den Ausdruck $A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots A_1 y$ und damit die gesuchten Coëfficienten A. Wird in diesem Quotienten wieder $y = \frac{1}{x-\alpha}$ gesetzt, so erhält man die sämmtlichen Partialbrüche

$$\frac{A_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-\alpha)^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_1}{(x-\alpha)}.$$

Der Rest dieser Division mufs den Werth $\frac{\varrho\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)}$ repräsentiren und wieder zu $\frac{\varrho(x)}{\varphi(x)}$ werden, wenn man ebenfalls $y = \frac{1}{x-\alpha}$ setzt. Dann ist:

$$\left[\frac{\varrho\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)}\right]_{y=\frac{1}{x-\alpha}} = \frac{\varrho(x)}{\varphi(x)} = \frac{B_p}{(x-\beta)^p} + \frac{B_{p-1}}{(x-\beta)^{p-1}} + \ldots + \frac{T}{x-\tau}$$

Wendet man das erläuterte Verfahren wieder auf diesen Werth an, so erhält man die Partialbrüche, deren Zähler durch B bezeichnet sind, u. s. w.

Beispiel : $\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)}$
$+ \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{(x+1)}$

Man setze $x - 1 = \frac{1}{y}$, $x = \frac{1+y}{y}$

$$\frac{\psi\left(\frac{1+y}{y}\right)}{f\left(\frac{1+y}{y}\right)} = \frac{10y^4+6y^3+y^2+y}{4y^2+4y+1} = \frac{5}{2}y^2 - y + \frac{\frac{5}{2}y^2+2y}{4y^2+4y+1}$$

Wieder $y = \frac{1}{x-1}$ gesetzt, gibt:

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$$

$$\frac{\varrho(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2} = \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{(x+1)}$$

$x + 1 = \frac{1}{y}$ gesetzt, gibt:

$$\frac{\varrho\left(\frac{1-y}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1-y}{y}\right)} = -\frac{3}{2}y^2 + 2y,$$

woraus für $y = \frac{1}{x+1}$ entsteht:

$$\frac{\varrho(x)}{\varphi(x)} = \frac{-\frac{3}{2}}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)}$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{\frac{3}{2}}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)}$$

71. $$\int \frac{x^3-2x^2+7x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx = \frac{-5}{2(x-1)} - \lg(x-1) + \frac{3}{2(x+1)} + 2\lg(x+1)$$

2. Beispiel: $$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{x^4-7x^3+3x^2-11x+13}{x^3(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{\varrho(x)}{\varphi(x)}$$

Man setzt $x = \frac{1}{y}$:

$$\frac{\psi\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{13y^6 - 11y^5 + 3y^4 - 7y^3 + y^2}{y^3 + 2y^2 + 2y + 1} = 13y^3 - 37y^2 + 51y$$

$$- \frac{48y^3 + 64y^2 + 51y}{y^3 + 2y^2 + 2y + 1}$$

Nun ist $A_3 = 13$, $A_2 = -37$, $A_1 = 51$. Wird in dem Restbruch $y = \frac{1}{x}$ gesetzt, so erhält man :

$$\frac{\varrho(x)}{\varphi(x)} = - \frac{51x^2 + 64x + 48}{(x+1)(x^2+x+1)} = - \left[\frac{B}{(x+1)} + \frac{mx+n}{x^2+x+1}\right]$$

Nach (20) ist $B = 35$, und nach dem Satz der unbestimmten Coëfficienten $M = 16$, $N = 13$.

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{13}{x^3} - \frac{37}{x^2} + \frac{51}{x} - \frac{35}{x+1} - \frac{16x+13}{x^2+x+1}$$

72. $\int \frac{x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 11x + 13}{x^3(x+1)(x^2+x+1)} dx = \frac{-13}{2x^2} + \frac{37}{x} + 51 \lg x$
$- 35 \lg(x+1) - 8 \lg(x^2+x+1) - \frac{10}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

73. $\int \frac{x^3 - 22x^2 + 57x + 32}{(x+1)^2(x-3)^2} dx = \frac{3}{x+1} + 5 \lg(x+1) - \frac{2}{x-3}$
$- 4 \lg(x-3)$

74. $\int \frac{7x^3 - 32x^2 + 50x - 28}{(x-1)^3(x-4)} dx = - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)}$
$+ 3 \lg(x-1) + 4 \lg(x-4)$

75. $\int \frac{3x^2 - 2x + 7}{x^3 + 3x^2 - 4} dx = \frac{23}{3(x+2)} + \frac{19}{9} \lg(x+2) + \frac{8}{9} \lg(x-1)$

76. $\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)}$
$+ 2 \lg(x-1) - \lg x$

77. $\int \frac{3x^2 + x - 2}{(x-1)^3(x^2+1)} dx = - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{3}{2} \lg(x-1)$
$+ \frac{3}{4} \lg(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg} x$

78. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2(x+1)} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2\lg x - \frac{1}{4}\lg(x+1)$
$- \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\lg(x-1)$

79. $\int \frac{4x^2-2x+3}{x^4+x^3-x^2-x} dx = -3\lg x + \frac{5}{4}\lg(x-1) - \frac{9}{2(x+1)}$
$+ \frac{7}{4}\lg(x+1)$

$$\int \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^n} dx$$

$$\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^n} = \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-\alpha)^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_1}{(x-\alpha)}$$

Wird $x - \alpha = \frac{1}{y}$, $x = \frac{1+\alpha y}{y}$ gesetzt, so wird

$$y^n \psi\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right) = A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots\ldots A_1 y.$$

Setzt man wieder $y = \frac{1}{x-\alpha}$, so erhält man daraus die gesuchten Partialbrüche.

80. $\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^2} dx = \frac{x^2}{2} - 4\lg(x-2) + \frac{7}{x-2}$

81. $\int \frac{2x^5 - x^4 + 4x^2 - 5x + 1}{(x-3)^6} dx = -\left[\frac{427}{5(x-3)^5} + \frac{721}{4(x-3)^4}\right.$
$\left. + \frac{490}{3(x-3)^3} + \frac{84}{(x-3)^2} + \frac{29}{x-3}\right] + 2\lg(x-3)$

82. $\int \frac{6x^3+89x^2+438x+719}{(x+5)^4} dx = -\frac{4}{3(x+5)^3} + \frac{1}{(x+5)^2}$
$+ \frac{1}{x+5} + 6\lg(x+5)$

83. $\int \frac{3x^2-17x+21}{(2-x)^3} dx = \frac{1}{2(x-2)^2} + \frac{5}{x-2} + 3\lg(x-2)$

Wenn wieder die Wurzeln des Nenners complex sind, bleibt das Verfahren, die Funktion in Partialbrüche zu zerlegen, unverändert.

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2x+1}{(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_2}{(x-i)^2} + \frac{A_1}{(x-i)} + \frac{B_2}{(x+i)^2} + \frac{B_1}{(x+i)}$$

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{4i}}{(x-i)} - \frac{\frac{1}{4i}}{(x+i)} + \frac{\frac{2i-1}{4}}{(x+i)^2} - \frac{\frac{2i+1}{4}}{(x-i)^2}$$

84. $$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x$$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{\frac{i}{8}}{(x+i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x+i)^2} + \frac{\frac{i}{16}}{x+i} - \frac{\frac{i}{8}}{(x-i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x-i)^2} - \frac{\frac{i}{16}}{x-i}$$

85. $$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} + \mathrm{arc\,tg}\,x\right]$$

86. $$\int \frac{x^5}{(x^3+1)^2}\,dx = \frac{1}{3}\lg(x^3+1) + \frac{1}{3(x^3+1)}$$

§ 4. Integration der Form : $\int f(x, \sqrt[n]{a+bx})\,dx$.

Ein Integral von dieser Form wird rational, wenn man setzt :

$$a + bx = z^n,\quad dx = n\,z^{n-1}\,dz,\quad x = \frac{z^n - a}{b}$$

$$\int x\sqrt[3]{a+bx}\,dx,\quad a + bx = z^3,\quad dx = \frac{3z^2}{b},\quad x = \frac{z^3 - a}{b}$$

87. $$\int x\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3}{28b^2}(4bx - 3a)\sqrt[3]{(a+bx)^4}$$

88. $$\int x^2\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^3}{10} - \frac{2a(a+bx)^2}{7} + \frac{a^2(a+bx)}{4}\right]\sqrt[3]{a+bx}$$

89. $$\int x^3\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3}{b^4}\left[\frac{(a+bx)^4}{13} - \frac{3a(a+bx)^3}{10} + \frac{3a^2(a+bx)^2}{7} - \frac{a^3(a+bx)}{4}\right]\sqrt[3]{a+bx}$$

90. $$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \frac{3}{7}(x^2 - x - 12)\sqrt[3]{x-4}$$

91. $\int x\sqrt{a+x}\,dx = \frac{6x-4a}{15}\sqrt{(a+x)^3}$

92. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$

93. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2}$

94. $\int \frac{x^3}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b^4}\left[\frac{(a+bx)^3}{7} - \frac{3a(a+bx)^2}{5}\right.$
$\left. + a^2bx\right]\sqrt{a+bx}$

95. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{a+bx}}\,dx = \frac{4}{21b^2}(3bx-4a)\sqrt[4]{(a+bx)^3}$

96. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x} + \lg\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

97. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\lg\frac{x+2a-2\sqrt{a}\sqrt{a+x}}{x}$; $a > 0$
$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{-a}}$; $a < 0$

98. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lg\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}$

99. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}\,dx = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}$
$-(1+x) - \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$
Man setze $x+1 = z^6$.

100. $\int \frac{x^2}{3\sqrt[3]{x+2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{8} + \frac{9-3x}{10}\right)\sqrt[3]{(x+2)^2}$

101. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \frac{2}{27}\left(\frac{9x^2}{5} - 4x + \frac{40}{3}\right)\sqrt{5+3x}$

102. $$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}$$

$$+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[6]{x}$$

103. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}} = \frac{1}{b-a}\int(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})\,dx$$

$$= \frac{2}{3(b-a)}\left[\sqrt{(x-a)^3}+\sqrt{(x-b)^3}\right]$$

104. $$\int \frac{x}{\sqrt{(a+bx)^3}}\,dx = \frac{4a+2bx}{b^2\sqrt{(a+bx)}}$$

§ 5. Das Integral : $\int F\,(x, \sqrt{a+2bx+cx^2})\,dx$.

Alle Integrale dieser Gattung können auf die Form gebracht werden :

$$\int \frac{A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + A_1 x + A_0}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

Bezeichnen wir den Zähler dieses Bruches durch $f_n(x)$, indem wir durch den Index n den Grad der Funktion ausdrücken, und verstehen wir unter $\varphi_{n-1}(x)$ einen ähnlichen Ausdruck vom $(n-1)^{ten}$ Grad:

$$\varphi_{n-1}(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + , \ldots \alpha_1 x + \alpha_0,$$

so können wir setzen :

$$\int \frac{f_n(x)}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \varphi_{n-1}(x)\sqrt{a+2bx+cx^2} + K\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

Um sich von der Identität der beiden Seiten dieser Gleichung zu überzeugen, hat man dieselbe zu differenziren.

$$\frac{f_n(x)}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{d\varphi_{n-1}(x)}{dx}\sqrt{a+2bx+cx^2} + \frac{\varphi_{n-1}(x)(b+cx)}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

$$+\frac{K}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

$$f_n(x) = \frac{d\varphi_{n-1}(x)}{dx}(a+2bx+cx^2) + \varphi_{n-1}(x)\,(b+cx) + K \quad (33)$$

Ein Blick auf diese Gleichung zeigt uns, daſs die beiden Seiten von gleich hohem, nämlich vom n^{ten} Grad sind. Wir

benutzen dieselbe, um nach dem Satz der unbestimmten Coëfficienten die Coëfficienten der Funktion $\varphi_n(x)$ zu bestimmen. Wie dies geschieht, soll zunächst an einem Beispiel gezeigt werden.

$$\int\frac{x^4-3x^3+2x-1}{\sqrt{1+2x+4x^2}}dx=(\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\sqrt{1+2x+4x^2}$$
$$+K\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x+4x^2}}$$

$$\frac{x^4-3x^3+2x-1}{\sqrt{1+2x+4x^2}}=(3\alpha_3x^2+2\alpha_2x+\alpha_1)\sqrt{1+2x+4x^2}$$
$$+\frac{(1+4x)(\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)}{\sqrt{1+2x+4x^2}}+\frac{K}{\sqrt{1+2x+4x^2}}$$

$$x^4-3x^3+2x-1=(3\alpha_3x^2+2\alpha_2x+\alpha_1)(1+2x+4x^2)$$
$$+(1+4x)(\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)+K.$$

Werden die Coëfficienten gleich hoher Potenzen gleich gesetzt, so gibts :

$$1=16\alpha_3,\quad -3=7\alpha_3+12\alpha_2,\quad 0=8\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3,$$
$$2=4\alpha_0+3\alpha_1+2\alpha_2,\quad -1=\alpha_0+\alpha_1+K.$$

$$\alpha_3=\frac{1}{16},\quad \alpha_2=-\frac{55}{192},\quad \alpha_1=\frac{239}{1536},\quad \alpha_0=\frac{3235}{6144},$$

$$K=-\frac{10335}{6144}.$$

105. $$\int\frac{x^4-3x^3+2x-1}{\sqrt{1+2x+4x^2}}dx=\left[\frac{1}{16}x^3-\frac{55}{192}x^2+\frac{239}{1536}x+\frac{3235}{6144}\right]$$
$$.\sqrt{1+2x+4x^2}-\frac{10335}{6144}\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x+4x^2}}$$

Wie das zurückgebliebene Integral weiter entwickelt wird, soll später gezeigt werden.

Das Gesetz der Coëfficienten von $\varphi(x)$ soll an folgendem Beispiel festgestellt werden :

$$\int\frac{A_9x^9+A_8x^8+\ldots\ldots+A_1x+A_0}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=(\alpha_8x^8+\alpha_7x^7+\ldots\ldots$$
$$+\alpha_1x+\alpha_0)\sqrt{a+2bx+cx^2}+K\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

$$A_9 x^9 + A_8 x^8 + \ldots + A_0 = (8\alpha_8 x^7 + 7\alpha_7 x^6 + \ldots + \alpha_1)(a + 2bx + cx^2) + (\alpha_8 x^8 + \alpha_7 x^7 + \ldots \alpha_0)(b + cx) + K$$

Durch Vergleich der Coëfficienten gleich hoher Potenzen erhält man:

$$\begin{aligned}
A_9 &= 9c\alpha_8 \\
A_8 &= 8c\alpha_7 + 17b\alpha_8 \\
A_7 &= 7c\alpha_6 + 15b\alpha_7 + 8a\alpha_8 \\
A_6 &= 6c\alpha_5 + 13b\alpha_6 + 7a\alpha_7 \\
A_5 &= 5c\alpha_4 + 11b\alpha_5 + 6a\alpha_6 \\
A_4 &= 4c\alpha_3 + 9b\alpha_4 + 5a\alpha_5 \\
A_3 &= 3c\alpha_2 + 7b\alpha_3 + 4a\alpha_4 \\
A_2 &= 2c\alpha_1 + 5b\alpha_2 + 3a\alpha_3 \\
A_1 &= 1c\alpha_0 + 3b\alpha_1 + 2a\alpha_2 \\
A_0 &= 1b\alpha_0 + 1a\alpha_1 + K.
\end{aligned} \tag{34}$$

Um dem Gesetz, das diesen Gleichungen zu Grund liegt, eine allgemeine Form zu geben, setzen wir:

$$\int \frac{A_n x^n + \ldots A_1 x + A_0}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx = (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0) \sqrt{a + 2bx + cx^2} + K \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= nc\alpha_{n-1} \\
A_{n-1} &= (n-1)c\alpha_{n-2} + (2n-1)b\alpha_{n-1} \\
A_{n-2} &= (n-2)c\alpha_{n-3} + (2n-3)b\alpha_{n-2} + (n-1)a\alpha_{n-1} \\
A_{n-3} &= (n-3)c\alpha_{n-4} + (2n-5)b\alpha_{n-3} + (n-2)a\alpha_{n-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1 &= 1c\alpha_0 + 3b\alpha_1 + 2a\alpha_2 \\
A_0 &= 1b\alpha_0 + 1a\alpha_1 + K.
\end{aligned} \tag{35}$$

Unsere Aufgabe ist nun zurückgeführt auf die weitere Entwicklung von

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

Es sei:

1) $c > o$

Man setze $\sqrt{a + 2bx + cx^2} = x\sqrt{c} + z$, $\frac{dx}{dz} = \frac{x\sqrt{c} + z}{b - z\sqrt{c}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \int \frac{dz}{b - z\sqrt{c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \lg (b - z\sqrt{c})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \lg (b + cx - \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2})$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{c}} \lg (b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}) \quad (36)$$

je nachdem man $\sqrt{c}$ mit dem $+$ oder $-$Zeichen nimmt. Zieht man den ersten Werth von dem zweiten ab, so erhält man als Differenz $\frac{1}{\sqrt{c}} \lg (b^2 - ac)$, d. h. eine Constante, wie dies bei verschiedenen Formen des nämlichen Integrals der Fall sein mufs.

2) $c < o$

Werden Zähler und Nenner mit dem reellen Werth $\sqrt{-c}$ multiplicirt, so gibts:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \int \frac{\sqrt{-c}\, dx}{\sqrt{b^2 - ac - (b + cx)^2}}$$

Nun wird $\frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}} = z$, $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{c}\sqrt{b^2 - ac}$ gesetzt.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \int \frac{\frac{\sqrt{-c}}{c} dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin z$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}} \quad (37)$$

Diese Transformation wird unmöglich, wenn $b^2 - ac = o$. Dann ist $a + 2bx + cx^2 = (\sqrt{a} + x\sqrt{c})^2$ und das Integral leicht auszuführen.

106. $$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{25}{12}x - \frac{163}{24}\right)\sqrt{x^2 + x + 1}$$
$$+ \frac{85}{16} \lg \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)$$

107. $\int \frac{4x^4+15x^3-9x^2+14x+46}{\sqrt{x^2+6x+5}}dx = (x^3-2x^2+3x+7)$
$\cdot \sqrt{x^2+6x+5} + 10\lg(3+x+\sqrt{x^2+6x+5})$

108. $\int \frac{5x^2-2x+10}{\sqrt{3x^2-5x+8}}dx = \left(\frac{5}{6}x+\frac{17}{12}\right)\sqrt{3x^2-5x+8}$
$+ 8\sqrt{3}\lg(3x - \frac{5}{2} + \sqrt{3}\sqrt{3x^2-5x+8})$

109. $\int \frac{x^3+4x^2-6x+3}{\sqrt{5+6x-x^2}}dx = -\left(\frac{x^2}{3}+\frac{9x}{2}+\frac{227}{6}\right)\sqrt{5+6x-x^2}$
$- 139 \arcsin \frac{3-x}{\sqrt{14}}$

110. $\int \frac{-45x^3+20x^2+65x+54}{\sqrt{7+8x-5x^2}}dx = (3x^2+4x+5)$
$\cdot \sqrt{7+8x-5x^2} - \frac{6}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{4-5x}{\sqrt{51}}$

111. $\int \frac{mx^2+nx+p}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx = \left(\frac{mx}{2c}+\frac{2cn-3bm}{2c^2}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2}$
$+ p - \frac{2bnc-3b^2m+amc}{2c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

112. $\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2}$
$+ \left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

113. $\int \sqrt{3x^2+10x+9}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right)\sqrt{3x^2+10x+9}$
$+ \frac{1}{\sqrt{27}}\lg(5+3x+\sqrt{3}\sqrt{3x^2+10x+9}$

114. $\int \sqrt{11+12x-8x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)\sqrt{11+12x-8x^2}$
$- \frac{31}{8\sqrt{2}} \arcsin \frac{3-4x}{\sqrt{31}}$

115. $\int x\sqrt{8+x-x^2}\,dx = \left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}-\frac{67}{24}\right)\sqrt{8+x-x^2}$
$- \frac{33}{16} \arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{33}}$

116. $$\int\sqrt{(a+2bx+cx^2)^3}\,dx=\left[\frac{c}{4}x^3+\frac{3b}{4}x^2+\frac{5ac+b^2}{8c}x+\frac{5ab}{8c}-\frac{3b^3}{8c^2}\right]\sqrt{a+2bx+cx^2}+\frac{3}{8}\left(a-\frac{b^2}{c}\right)^2\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

117. $$\int\sqrt{(5x^2+4x+3)^3}\,dx=\left[\frac{5}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{79}{40}x+\frac{63}{100}\right]\sqrt{5x^2+4x+3}+\frac{363}{200\sqrt{5}}\lg\left(2+5x+\sqrt{5}\sqrt{5x^2+4x+3}\right)$$

118. $$\int(x^2-3x+5)\sqrt{3x^2-2x+6}\,dx=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{37}{36}x^2+\frac{625}{216}x-\frac{503}{216}\right]\sqrt{3x^2-2x+6}+\frac{2227}{216\sqrt{3}}\lg\left(3x-1+\sqrt{3}\sqrt{3x^2-2x+6}\right)$$

119. $$\int(2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^2-3x+\frac{1}{6}\right]\sqrt{2+3x-x^2}+\frac{17}{4}\arcsin\frac{3-2x}{\sqrt{17}}.$$

120. $$\int\frac{x^n}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=[\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\alpha_0]\sqrt{a+2bx+cx^2}+K\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

Die α bestimmt man nach (35) und erhält:

$$\alpha_{n-1}=\frac{1}{nc}$$

$$\alpha_{n-2}=-\frac{(2n-1)\,b\,\alpha_{n-1}}{(n-1)\,c}$$

$$\alpha_{n-3}=-\frac{(2n-3)\,b\,\alpha_{n-2}+(n-1)\,a\,\alpha_{n-1}}{(n-2)\,c} \qquad (38)$$

$$\alpha_{n-4}=-\frac{(2n-5)\,b\,a_{n-3}+(n-2)\,a\,\alpha_{n-2}}{(n-3)\,c}$$

. . . .

$$K=-\alpha_0\,b-\alpha_1\,a$$

121. $$\int\frac{x}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

122. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left[\frac{1}{2c}x - \frac{3b}{2c^2}\right]\sqrt{a+2bx+cx^2} + \frac{3b^2-ac}{2c^2}\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

123. $$\int \frac{x^3}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left[\frac{1}{3c}x^2 - \frac{5b}{6c^2}x + \frac{5b^2}{2c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right]\sqrt{a+2bx+cx^2} + \left(\frac{3ab}{2c^2} - \frac{5b^3}{2c^3}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

124. $$\int \frac{x^4}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left[\frac{1}{4c}x^3 - \frac{7b}{12c^2}x^2 + \frac{35b^2-9ac}{24c^3}x + \frac{55abc-105b^3}{24c^4}\right]\sqrt{a+2bx+cx^2} + \left[\frac{35b^4}{8c^4} - \frac{15ab^2}{4c^3} + \frac{3a^2}{8c^2}\right]\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

125. $$\int \frac{x^4}{\sqrt{3+2x+x^2}}\,dx = \left[\frac{x^3}{4} - \frac{7x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{5}{2}\right]\sqrt{3+2x+x^2} - \frac{7}{2}\lg\left(1+x+\sqrt{3+2x+x^2}\right)$$

126. $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+2x+3x^2}}\,dx = \left[\frac{x^4}{15} - \frac{x^3}{20} + \frac{x^2}{108} + \frac{7x}{405} - \frac{19}{810}\right]\cdot\sqrt{1+2x+3x^2} + \frac{1}{162\sqrt{3}}\lg\left(1+3x+\sqrt{3}\sqrt{1+2x+3x^2}\right)$$

127. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{b}}\lg\left(bx \pm \sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$$

128. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

129. $$\int \sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\lg\left(bx+\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$$

130. $$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

131. $$\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{x+a}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2}\lg\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$$

132. $\int\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax - x^2} - \frac{a^2}{2}\text{ arc sin }\frac{a-x}{a}$

133. $\int x^2\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{4} - \frac{ax^2}{12} - \frac{5a^2x}{24} - \frac{5a^3}{8}\right]$
$\sqrt{2ax - x^2} - \frac{5a^4}{8}\text{ arc sin }\frac{a-x}{a}$

Aus Aufgabe 120 erhält man leicht:

134. $\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = [\alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-3}x^{n-3} + \alpha_{n-5}x^{n-5} + \ldots]$
$\sqrt{a+bx^2} + K\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$

$$\alpha_{n-1} = \frac{1}{nb}$$

$$\alpha_{n-3} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{a}{b^2}$$

$$\alpha_{n-5} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{a^2}{b^3} \qquad (39)$$

$$\alpha_{n-7} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{n-5}{n-6}\cdot\frac{a^3}{b^4}$$

. . . .

$K = -a\,\alpha_1$

135. $\int\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}$

136. $\int\frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{x}{2b}\sqrt{a+bx^2} - \frac{a}{2b\sqrt{b}}\lg(bx$
$+ \sqrt{b}\sqrt{a+bx^2})$

137. $\int\frac{x^3}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{a+bx^2}$

138. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx = -\left[\frac{x^2}{9} + \frac{2}{27}\right]\sqrt{1-3x^2}$

139. $\int\frac{x^4}{\sqrt{4+5x^2}}\,dx = \left[\frac{x^3}{20} - \frac{3x}{50}\right]\sqrt{4+5x^2} + \frac{6}{25\sqrt{5}}\lg(5x$
$+ \sqrt{5}\sqrt{4+5x^2})$

140. $\int\frac{x^5}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx = \left[\frac{x^4}{10} - \frac{x^6}{5} + \frac{3}{5}\right]\sqrt{3+2x^2}$

141. $$\int \frac{x^6}{\sqrt{3-5x^2}}\,dx = -\left[\frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{40} + \frac{9x}{400}\right]\sqrt{3-5x^2} + \frac{27}{400\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x}{\sqrt{15}}$$

Ist n grad, so ist:

142. $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left[\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{3}{2}x\right]\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{3}{2}\arcsin x$$

143. $$\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left[\frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right]\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{16}\arcsin x$$

144. $$\int \frac{x^8}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left[\frac{x^7}{8} + \frac{7x^5}{48} + \frac{35x^3}{192} + \frac{35x}{128}\right]\sqrt{1-x^2} + \frac{35}{128}\arcsin x$$

Ist n ungrad, so ist:

145. $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left[\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \ldots\ldots\right]\sqrt{1-x^2}$$

146. $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left[\frac{x^4}{5} + \frac{4x^2}{15} + \frac{8}{15}\right]\sqrt{1-x^2}$$

147. $$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left[\frac{x^6}{7} + \frac{6x^4}{35} + \frac{8x^2}{35} + \frac{16}{35}\right]\sqrt{1-x^2}$$

Setzt man $x - \alpha = \frac{1}{y}$, so wird:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)y+(a+2b\alpha+c\alpha^2)y^2}}$$

Nun sind wieder 3 Fälle zu unterscheiden:

1) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 > o$ und $= m$

148. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \lg \frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x \mp \sqrt{m}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x-\alpha}$$

2) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 < o$

149. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-(a+2b\alpha+c\alpha^2)}} \arcsin \frac{(b+c\alpha)x+a+b\alpha}{(x-\alpha)\sqrt{b^2-ac}}$$

3) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 = o$

Dann ist α eine Wurzel von : $a + 2bx + cx^2 = o$. Nennen wir die andere Wurzel β, so ist : $c(x-\alpha)(x-\beta) = cx^2 + 2bx + a$. Wird $x - \alpha = z^2$ gesetzt, so ist $x - \beta = z^2 + \alpha - \beta$, $dx = 2z\,dz$, und das Integral geht über in

$$J = \frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{dz}{z^2\sqrt{z^2+\alpha-\beta}}$$

Man setzt wieder $z = \frac{1}{y}$ und erhält :

$$J = -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha-\beta)y^2+1}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)y^2+1}}{\alpha-\beta}$$

und daraus durch umgekehrte Substitution :

$$J = -\frac{2}{c} \frac{\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)} = -\frac{2}{c} \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)}$$

Da aber $\alpha + \beta = -\frac{2b}{c}$ sein mufs, so ist $\alpha - \beta = 2\left(\frac{c\alpha+b}{c}\right)$ und

150. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(b+c\alpha)(x-\alpha)}$$

151. $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \lg \left[\frac{2x+4-\sqrt{6}\sqrt{x^2+2x+3}}{x-1}\right]$$

152. $$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x+5}{(x-2)\sqrt{8}}$$

153. $$\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+x-12}} = -\frac{2}{7}\,\frac{\sqrt{x^2+x-12}}{x-3}$$

154. $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Wenn $a > o$, ist :

155. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg\left[\frac{a+bx-\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}\right]$$

Wenn $a < o$, ist :

156. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \text{ arc sin } \frac{bx+a}{x\sqrt{b^2-ac}}$$

157. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$$

158. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \lg\left[\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right]$$

159. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{ arc sin } \frac{1}{x}$$

160. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = \text{arc sin } \frac{x-2}{x\sqrt{5}}$$

Wird $x-\alpha = \frac{1}{y}$ gesetzt, so wird :

161. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\int \frac{y^{n-1}}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)y+(a+2b\alpha+c\alpha^2)y^2}}$$

162. $$\int \frac{dx}{(x-2)^4\sqrt{1-4x+x^2}} = \left(\frac{1}{9(x-2)^3} + \frac{2}{27(x-2)}\right) \cdot \sqrt{x^2-4x+1}$$

163. $$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}} = \left(-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)}\right)\sqrt{3-2x^2} + 7\lg\frac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1}$$

164. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

165. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a+2bx+cx^2}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2x}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2}$
$+ \left(\frac{3b^2}{2a^2} - \frac{c}{2a}\right) \int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

166. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-4x+x^2}} = -\frac{\sqrt{1-4x+x^2}}{x}$
$+ 2 \lg \frac{1-2x-\sqrt{1-4x+x^2}}{x}$

167. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} - \frac{1}{2} \lg \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{dx}$

168. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{3-2x+x^2}} = -\left(\frac{1}{9x^3} + \frac{5}{54x^2} + \frac{1}{54x}\right)\sqrt{3-2x+x^2}$
$- \frac{2}{27\sqrt{3}} \lg \left(\frac{3-x-\sqrt{3}\sqrt{3-2x+x^2}}{x}\right)$

169. $\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x} dx = \sqrt{a+2bx+cx^2} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}$
$+ b\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

170. $\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}$
$+ b\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} + c\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

171. $\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x^3} dx = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{2ax}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2}$
$- \frac{b^2-ac}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

Wird $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in Partialbrüche zerlegt, so zerfällt dieses Integral in eine Summe integrirbarer Theile.

172. $\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} \cdot \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x-7}} = \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2}\right)$
$\cdot \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x-7}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \lg \frac{11x-1-\sqrt{32}\sqrt{3x^2+4x-7}}{x-3}$
$- \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc sin} \frac{4x+11}{5(x+2)}$

173. $\int \frac{4x+17}{x^2+x-6} \cdot \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ arc sin } \frac{5-4x}{(x-2)\sqrt{10}}$
$- \frac{1}{\sqrt{13}} \text{arc sin} \frac{6x+5}{(x+3)\sqrt{10}}$

174. $\int \frac{3x-5}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1}$
$+ \frac{3}{\sqrt{5}} \lg \frac{x+4-\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}$

175. $\int \frac{dx}{(x^2-9)\sqrt{5+6x-7x^2}} = \frac{1}{6\sqrt{40}} \text{ arc sin } \frac{7-9x}{(x-3)\sqrt{11}}$
$- \frac{1}{6\sqrt{76}} \text{arc sin} \frac{12x-2}{(x+3)\sqrt{11}}$

§ 6. Integration von Exponential- und logarithmischen Funktionen.

$$\int f(e^x)\, dx$$

wird transformirt, indem man $e^x = y$ setzt.

176. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = \int \frac{y-1}{y+1} \frac{dy}{y} = 2 \lg (y+1) - \lg y =$
$2 \lg (e^x+1) - x$

177. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \text{arc tg } y = \text{arc tg } e^x$

178. $\int \frac{4e^x+6e^{-x}}{9e^x-4e^{-x}} dx = \frac{1}{9} \int \frac{4y^2+6}{y^3-\frac{4}{9}y} dy =$

$\frac{1}{18} \left[\frac{35}{2} \lg \left(y^2-\frac{4}{9}\right) - 27 \lg y\right] = \frac{35}{36} \lg \left(e^{2x}-\frac{4}{9}\right)$
$- \frac{3}{2} x$

179. $\int \frac{dx}{e^x + a} = \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \lg (e^x + a)$

180. $\int \frac{dx}{e^x} = - \frac{1}{e^x}$

181. $\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m}$

182. $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx = - \frac{1}{e^x - 1}$

183. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x$

184. $\int \frac{e^x}{e^x + a} dx = \lg (e^x + a)$

185. $\int x^n e^{mx} dx = \frac{x^n e^{mx}}{m} - \frac{n}{m} \int e^{mx} x^{n-1} dx$

186. $\int x e^x dx = e^x (x - 1)$

187. $\int x^n e^x dx = e^x [x^n - n x^{n-1} + n (n-1) x^{n-2} - \ldots\ldots]$

188. $\int x^4 e^x dx = e^x [x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24]$

189. $\int x^4 e^{2x} dx = e^{2x} \left[\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4}\right]$

190. $\int x^3 e^{-x} dx = - e^{-x} [x^3 + 3x^2 + 6x + 6]$

191. $\int \frac{e^{mx}}{x^n} dx = - \frac{e^{mx}}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{m}{n-1} \int \frac{e^{mx}}{x^{n-1}} dx$

192. $\int \frac{e^x}{x^3} dx = - \frac{e^x}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{e^x}{x} dx$

193. $\int \frac{e^x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots\ldots\right) dx$

$= \lg x + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \ldots\ldots$

194. $\int \frac{e^x}{x^4} dx = - \frac{e^x}{3} \left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}\right] + \frac{1}{6} \int \frac{e^x}{x} dx$

195. $\int \frac{e^x}{(x - \alpha)^n} dx = e^\alpha \int \frac{e^y}{y^n} dy$, wenn $x - \alpha = y$

196. $\int \frac{e^x}{(x-2)^2}\, dx = -e^2\left(\frac{e^y}{y} - \int \frac{e^y}{y}\, dy\right), \quad x = y + 2$

197. $\int \frac{e^x}{(e^x + a)^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)(e^x + a)^{n-1}}$

Für $n = 1$ wird diese Formel unbrauchbar und wir haben Aufgabe 184.

198. $\int a^{bx} f(x)\, dx = \int e^{mbx} f(x)\, dx$, wenn $a = e^m$, $m = \lg a$

199. $\int x^n a^{bx}\, dx = \frac{x^n a^{bx}}{b \lg a} - \frac{n}{b \lg a} \int a^{bx} x^{n-1}\, dx$

200. $\int \frac{a^{bx}}{x^n}\, dx = -\frac{a^{bx}}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{b \lg a}{n-1} \int \frac{a^{bx}}{x^{n-1}}\, dx$

Ist $n = 1$ geworden, so mufs das Integral in eine Reihe entwickelt und weiter geführt werden. Wird $\lg a = m$ gesetzt, so ist:

201. $\int \frac{a^x}{x}\, dx = \lg x + mx + \frac{m^2 x^2}{4} + \frac{m^3 x^3}{18} + \dots\dots$

202. $\int x^3 a^x\, dx = a^x \left[\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{6x}{m^3} - \frac{6}{m^4}\right]$

203. $\int \frac{a^x}{x^4} = -a^x \left[\frac{1}{3x^3} + \frac{m}{6x^2} + \frac{m^2}{6x}\right] + \frac{m^3}{6} \int \frac{a^x}{x}\, dx$

204. $\int a^{2x} x^3\, dx = \frac{a^{2x}}{2} \left[\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{2m^2} + \frac{3x}{2m^3} - \frac{3}{4m^4}\right]$

205. $\int f(\lg x)\, dx = \int e^y f(y)\, dy$, wenn $x = e^y$, $y = \lg x$

206. $\int (\lg x)^n\, dx = \int e^y y^n\, dy = e^y\, [y^n - n\, y^{n-1} + n(n-1)\, y^{n-2} + \dots]$
$= x\, [(\lg x)^n - n\, (\lg x)^{n-1} + n(n-1)(\lg x)^{n-2} - \dots]$

207. $\int \lg x\, dx = x\, [\lg x - 1]$

208. $\int (\lg x)^2\, dx = x\, [(\lg x)^2 - 2 \lg x + 2]$

209. $\int x^n \lg x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \lg x - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\lg x - \frac{1}{n+1}\right]$

210. $\int x^3 \lg x\, dx = \frac{x^4}{4}\left[\lg x - \frac{1}{4}\right]$

211. $\int x \lg x \, dx = \frac{x^2}{2}\left[\lg x - \frac{1}{2}\right]$

212. $\int \lg x \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt[2]{x^3}\left[\lg x - \frac{2}{3}\right]$

213. $\int \frac{\lg x}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}\left[\lg x + \frac{1}{n-1}\right]$

214. $\int \frac{\lg x}{x^4} dx = -\frac{1}{3 x^3}\left[\lg x + \frac{1}{3}\right]$

215. $\int \frac{\lg x}{x} dx = \frac{1}{2} (\lg x)^2$

Man setzt $\lg x = y$, $x = e^y$

216. $\int (a + b x)^n \lg x \, dx = \frac{(a + b x)^{n+1}}{(n+1) b} \lg x$
$- \frac{1}{(n+1) b} \int \frac{(a + b x)^{n+1}}{x} dx$

217. $\int (4 + 3 x)^2 \lg x \, dx = \frac{(4 + 3 x)^3}{9} \lg x - \frac{64}{9} \lg x - 16 x$
$- 6 x^2 - x^3$

218. $\int \lg (a + b x) \, dx = \frac{a + b x}{b} [\lg (a + b x) - 1]$

219. $\int x^n \lg (a + b x^m) \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \lg (a + b x^m)$
$- \frac{m b}{n+1} \int \frac{x^{m+n}}{a + b x^m} dx$

220. $\int x^2 \lg (a + b x) \, dx = \frac{x^3}{3} \lg (a + b x) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a x^2}{2 b}\right.$
$\left. + \frac{a^2 x}{b^2} - \frac{a^3}{b^3} \lg (a + b x)\right]$

221. $\int \lg (a + b x^2) \, dx = x \lg (a + b x^2) - 2 x + 2 a \int \frac{dx}{a + b x^2}$

222. $\int \lg (2 + 3 x^2) \, dx = x \lg (2 + 3 x^2) - 2 x + \sqrt{\frac{8}{3}} \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{3}{2}}$

223. $\int x \lg (1 + x^2) \, dx = \frac{1 + x^2}{2} \lg (1 + x^2) - \frac{x^2}{2}$

224. $\int x^3 \lg (x^2 + 3) \, dx = \frac{x^4}{4} \lg (x^2 + 3) - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{2} - 3 x^2 + 9 \lg (x^2 + 3)\right]$

225. $$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \lg x \, dx = \lg x \sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} dx$$
$$= (\lg x - 1)\sqrt{a^2+x^2} - a \lg \frac{a^2 - a\sqrt{a^2+x^2}}{x}$$

§ 7. Goniometrische und cyclometrische Funktionen.

226. $\int \operatorname{tg} x \, dx = - \lg \cos x$

227. $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \lg \sin x$

228. $\int \sin n x \, dx = - \frac{1}{n} \cos n x$

229. $\int \cos n x \, dx = \frac{1}{n} \sin n x$

230. $\int \operatorname{tg} n x \, dx = - \frac{1}{n} \lg \cos n x$

231. $\int \operatorname{cotg} n x \, dx = \frac{1}{n} \lg \sin n x$

232. $\int \sin x \cos x \, dx = - \frac{1}{4} \cos 2 x$

233. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2 x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2 x$

234. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2 x$

$$\int \sin^n x \, dx, \int \cos^n x \, dx$$

Diese beiden Integrale können nach verschiedenen Methoden ausgeführt werden.

1) Durch theilweise Integration:

$$\int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx = - \sin^{n-1} x \cos x$$
$$+ (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = - \sin^{n-1} x \cos x$$
$$+ (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

Durch eine einfache Reduction entsteht:

235. $$\int \sin^n x \, dx = - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

Ebenso wird die Reductionsformel für $\int \cos^n x\, dx$ entwickelt. Man kann aber auch in der vorhergehenden Formel $(90^0 - x)$ statt x, $-dx$ statt dx, und dann $\sin(90^0 - x) = \cos x$, $\cos(90^0 - x) = \sin x$ setzen und erhält:

236. $$\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

237. $$\int \sin^5 x\, dx = -\left[\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{4}{15}\sin^2 x + \frac{8}{15}\right]\cos x$$

238. $$\int \sin^8 x\, dx = -\left[\frac{\sin^7 x}{8} + \frac{7\sin^5 x}{48} + \frac{35\sin^3 x}{192} + \frac{35\sin x}{128}\right]\cos x + \frac{35\, x}{128}$$

239. $$\int \cos^6 x\, dx = \left[\frac{\cos^5 x}{6} + \frac{25\cos^3 x}{24} + \frac{5\cos x}{16}\right]\sin x + \frac{5\, x}{16}$$

240. $$\int \cos^7 x\, dx = \left[\frac{\cos^6 x}{7} + \frac{6\cos^4 x}{35} + \frac{8\cos^2 x}{35} + \frac{16}{35}\right]\sin x$$

2) Mit Hilfe der Exponentialfunktionen kann $\sin^n x$ und $\cos^n x$ in Funktionen vielfacher Bogen ausgedrückt werden, indem man setzt:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Beispiel:

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}}{32i}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} - 5\,\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + 10\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right]$$

241. $$\int \sin^5 x\, dx = \frac{1}{16}\left[-\frac{\cos 5x}{5} + \frac{5\cos 3x}{3} - 10\cos x\right]$$

242. $$\int \cos^6 x\, dx = \frac{\sin 6x}{192} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{5\, x}{16}$$

243. $$\int \sin^6 x\, dx = -\frac{1}{32}\left[\frac{\sin 6x}{6} - \frac{3\sin 4x}{2} + \frac{15\sin 2x}{2}\right] + \frac{5\, x}{16}$$

244. $\int \cos^7 x\, dx = \frac{1}{64}\left[\frac{\sin 7x}{7} + \frac{7 \sin 5x}{5} + 7\sin 3x + 35\sin x\right]$

245. $\int \cos^8 x\, dx = \frac{1}{128}\left[\frac{\sin 8x}{8} + \frac{4 \sin 6x}{3} + 7 \sin 4x\right.$

$\left. + 28 \sin 2x\right] + \frac{35x}{128}$

3) Wird $\sin x = y$ gesetzt, oder $\cos x = y$, so erhält man leicht:

$$\int \sin^n x\, dx = \int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\, dy\,; \quad \int \cos^n x\, dx = -\int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

246. $\int \sin^3 x\, dx = -\left[\frac{\sin^2 x + 2}{3}\right] \cos x$

247. $\int \sin^4 x\, dx = -\left[\frac{\sin^3 x}{4} + \frac{3 \sin x}{8}\right] \cos x + \frac{3x}{8}$

248. $\int \cos^4 x\, dx = \left[\frac{\cos^3 x}{4} + \frac{3 \cos x}{8}\right] \sin x + \frac{3x}{8}$

249. $\int \cos^5 x\, dx = \left[\frac{\cos^4 x}{5} + \frac{4 \cos^2 x}{15} + \frac{8}{15}\right] \sin x$

Wird in 235 und 236 gesetzt: $-m + 2$ statt n, so entsteht:

250. $\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$

251. $\int \frac{dx}{\cos^m x} = \frac{\sin x}{(m-1)\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\cos^{m-2} x}$

Beide Formeln führen bei ungradem n auf $n = 1$. Nun ist $\frac{d \lg \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{2}{\sin 2x}$, daher $\int \frac{2\, dx}{\sin 2x} = \lg \operatorname{tg} x$, oder:

252. $\int \frac{dx}{\sin x} = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

253. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(90^0 - x)} = -\int \frac{dz}{\sin z} = -\lg \operatorname{tg} \frac{z}{2}$

$= -\lg \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = \lg \operatorname{cotg}\left(45^0 - \frac{x}{2}\right)$

$= \lg \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{x}{2}\right)$

254. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

255. $\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\left[\frac{1}{5 \sin^5 x} + \frac{4}{15 \sin^3 x} + \frac{8}{15 \sin x}\right] \cos x$

256. $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \lg \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{x}{2}\right)$

257. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{4 \sin x}{15 \cos^3 x} + \frac{8}{15} \operatorname{tg} x$

Setzt man $\sin x = \frac{1}{y}$, oder $\cos x = \frac{1}{y}$, so wird man finden:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\int \frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2 - 1}} dy; \quad \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2 - 1}} dy$$

258. $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\left[\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{2}{3 \sin x}\right] \cos x$

259. $\int \frac{dx}{\sin^7 x} = -\left[\frac{1}{6 \sin^6 x} + \frac{5}{24 \sin^4 x} + \frac{5}{16 \sin^2 x}\right] \cos x + \frac{5}{16} \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

260. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{x}{2}\right)$

261. $\int \frac{dx}{\cos^7 x} = \left[\frac{1}{6 \cos^6 x} + \frac{5}{24 \cos^4 x} + \frac{5}{16 \cos^2 x}\right] \sin x + \frac{5}{16} \lg \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{x}{2}\right)$

262. $\int \frac{dx}{\cos^8 x} = \left[\frac{1}{7 \cos^7 x} + \frac{6}{35 \cos^5 x} + \frac{8}{35 \cos^3 x} + \frac{16}{35 \cos x}\right] \sin x$

263. $\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$

264. $\int \cos^n x \sin x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$

265. $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_1$

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

Gewöhnlich wird dieses Integral durch theilweise Integration auf ein einfacheres Integral derselben Art reducirt:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx$$

$\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x = \sin^{m-2} x \cos^n x (1 - \sin^2 x) = \sin^{m-2} x \cos^n x - \sin^m x \cos^n x$. Wird hiernach das letzte Integral zerlegt und dann reducirt, so gibts:

266. $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

Setzt man $m = p + 2$, so wird:

$$\int \sin^{p+2} x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{p+1} x \cos^{n+1} x}{p+n+2} + \frac{p+1}{p+n+2} \int \sin^p x \cos^n x \, dx$$

267. $$\int \sin^p x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{n+1} x}{p+1} + \frac{p+n+2}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^n x \, dx$$

Während 266 dazu dient, ein positives m zu verkleinern, wird durch 267 ein negatives p vergröſsert; in beiden Fällen bleibt n ungeändert. Wird wieder $(90^0 - x)$ statt x, $-dx$ statt dx gesetzt, so entstehen aus den beiden letzten Formeln die folgenden:

268. $$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{n+m} \int \cos^{m-2} x \sin^n x \, dx$$

269. $$\int \sin^n x \cos^p x \, dx = -\frac{\sin^{n+1} x \cos^{p+1} x}{p+1} + \frac{p+n+2}{p+1} \int \sin^n x \cos^{p+2} x \, dx$$

270. $$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \left[\frac{\sin^5 x}{6} - \frac{\sin^3 x}{24} - \frac{\sin x}{16}\right] \cos x + \frac{x}{16}$$

271. $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \left[\sin^6 x - \frac{\sin^4 x}{5} - \frac{4 \sin^2 x}{15} - \frac{8}{15}\right] \frac{\cos x}{7}$

Aufgaben dieser Art können auch so behandelt werden:

272. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \, (1 - \sin^2 x) \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{4} - \frac{\sin x}{8}\right] \cos x + \frac{x}{8}$

273. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x \, (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}$

274. $\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx = \frac{\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^7 x}{7}$

275. $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x \, (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx, \qquad \int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$$

Wird im ersten Integral $\sin x = y$, im zweiten $\cos x = y$ gesetzt, so wandeln sich dieselben um in:

$$-\int \frac{y^n}{y^2 - 1} dy \quad \text{und} \quad \int \frac{y^n}{y^2 - 1} dy$$

Die Division wird ausgeführt, der Quotient integrirt, in dem Restbruch aber vor der Integration die umgekehrte Substitution vollzogen, weil so ein leicht ausführbares Integral entsteht.

276. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^2 x}{2} - \lg \cos x$

277. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \lg \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{x}{2}\right)$

278. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

279. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx = \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^2 x}{2} + \lg \sin x$

280. $\int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx = \frac{1}{(n - 1) \cos^{n-1} x}$

281. $\int \frac{\cos x}{\sin^n x} dx = - \frac{1}{(n - 1) \sin^{n-1} x}$

Statt mittelst der Formeln 267 und 269 negative Exponenten zu reduciren, können derartige Aufgaben auch so behandelt werden:

282. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)^2 dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3 \cos^3 x}$
$- \frac{2}{\cos x} - \cos x$

283. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = - \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x}$

284. $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^5 x} dx = \left[\cos^4 x - \frac{25 \cos^2 x}{8} + \frac{15}{8}\right] \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{15}{8} \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

285. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx = \left[- \sin^3 x + \frac{3 \sin x}{2}\right] \frac{1}{\cos^2 x}$
$- \frac{3}{2} \lg \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{x}{2}\right)$

286. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} dx = \left[- \frac{\sin^6 x}{3} - 2 \sin^4 x + 8 \sin^2 x - \frac{16}{3}\right] \frac{1}{\cos^3 x}$

287. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \lg \operatorname{tg} x$

288. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = - 2 \operatorname{cotg} 2 x$

289. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = - \frac{1}{2 \sin^2 x} + \lg \operatorname{tg} x$

290. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{1}{3 \sin x \cos^3 x} - \frac{8}{3} \operatorname{cotg} 2 x$

Durch theilweise Integration erhält man:

291. $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \sin^n x \cos^{-n} x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n - 1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx$

292. $\int \operatorname{cotg}^n x \, dx = - \frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n - 1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \, dx$

293. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \lg \cos x$

294. $\int tg^8 x\,dx = \frac{1}{7} tg^7 x - \frac{1}{5} tg^5 x + \frac{1}{3} tg^3 x - tg\,x + x$

295. $\int cotg^6 x\,dx = -\frac{cotg^5 x}{5} + \frac{cotg^3 x}{3} - cotg\,x - x$

296. $\int cotg^7 x\,dx = -\frac{cotg^6 x}{6} + \frac{cotg^4 x}{4} - \frac{cotg^2 x}{2} - lg\,sin\,x$

$$\int e^{ax} \sin b\,x\,dx = -\frac{e^{ax} \cos b\,x}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos b\,x\,dx$$

$$\int e^{ax} \cos b\,x\,dx = \frac{e^{ax} \sin b\,x}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin b\,x\,dx$$

Wird je eines der beiden Integrale eliminirt, so gibts:

297. $\int e^{ax} \sin b\,x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a \sin b\,x - b \cos b\,x]$

298. $\int e^{ax} \cos b\,x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a \cos b\,x + b \sin b\,x]$

Setzt man in beiden Formeln $-x$ statt x, so gehen daraus die folgenden hervor:

299. $\int e^{-ax} \sin b\,x\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2}[a \sin b\,x + b \cos b\,x]$

300. $\int e^{-ax} \cos b\,x\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2}[a \cos b\,x - b \sin b\,x]$

301. $\int e^{ax} \sin m\,x \cos n\,x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{ax} \sin (m + n)\,x\,dx$

$$+ \frac{1}{2}\int e^{ax} \cos (m - n)\,x\,dx$$

302. $\int e^{ax} \sin^4 b\,x\,dx = \frac{1}{8}\int e^{ax} (\cos 4bx - 4 \cos 2bx + 3)\,dx$

303. $\int e^{ax} \cos^3 b\,x\,dx = \frac{1}{4}\int e^{ax} (\cos 3\,b\,x + 3 \cos b\,x)\,dx$

304. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\,dx$

305. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\,dx$

306. $\int \frac{\sin x}{x^n}\,dx = -\frac{\sin x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx$

307. $$\int \frac{\cos x}{x^n}\, dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}}\, dx$$

Wird $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ gesetzt, so ist $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ und

308. $$\int \frac{dx}{a+\cos x} = \frac{2}{a-1}\int \frac{dx}{y^2+\frac{a+1}{a-1}}$$

» $$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg} y \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \text{ wenn } \frac{a+1}{a-1} > o,$$

» $$= \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}} \lg \frac{y-\sqrt{\frac{a+1}{1-a}}}{y+\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}, \text{ wenn } \frac{a+1}{a-1} < o$$

Für $a = 1$ ist

309. $$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Ebenso findet man für $\sin x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$, dafs $y = \operatorname{tg}\left(45^0+\frac{x}{2}\right)$ und

310. $$\int \frac{dx}{a+\sin x} = \frac{2}{a+1}\int \frac{dy}{y^2+\frac{a-1}{a+1}}$$

» $$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg} y \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}, \text{ wenn } \frac{a-1}{a+1} > o,$$

» $$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \lg \frac{y-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{y+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}, \text{ wenn } \frac{a-1}{a+1} < o$$

Für $a = 1$ wird

311. $$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin^2\left(45^0+\frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{cotg}\left(45^0+\frac{x}{2}\right)$$

312. $$\int \frac{\cos x}{a+\cos x}\, dx = \int\left(1-\frac{a}{a+\cos x}\right) dx = x - a\int \frac{dx}{a+\cos x}$$

313. $\int \frac{\sin x}{a + \sin x} dx = x - a \int \frac{dx}{a + \sin x}$

314. $\int \frac{dx}{a + b \sin x + c \cos x} = S$

$$S = m \int \frac{dx}{ma + mb \sin x + mc \cos x} = m \int \frac{dx}{ma + \sin\lambda \sin x + \cos\lambda \cos x},$$

wenn $m b = \sin\lambda$, $m c = \cos\lambda$, oder $m = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ gesetzt wird. Diese Substitution ist zulässig, da immer $m b$ und $m c$ kleiner als 1 ist. Weiter ist $\lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{c}$, und

$$S = m \int \frac{dx}{a m + \cos(x - \lambda)}$$

Hiermit ist das gegebene Integral auf 308 zurückgeführt.

315. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right); \; m = \frac{1}{\sqrt{2}}; \; \lambda = \frac{\pi}{4}$.

Ist $m a - 1 = o$, oder $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, so ist :

316. $\int \frac{dx}{a + b \sin x + c \cos x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{c \sin x - b \cos x}{a + b \sin x + c \cos x}$

Bestimmte Integrale.

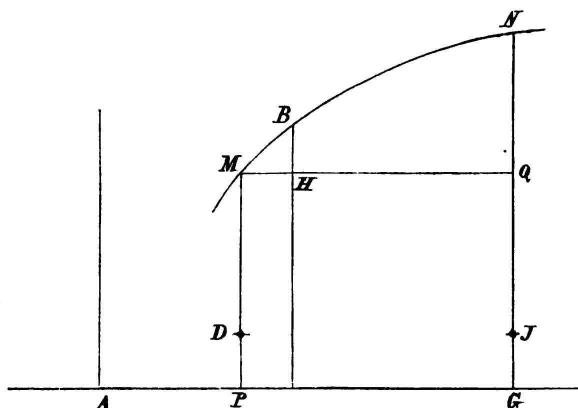
Zu dem unbestimmten Integral

$$y = \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

kann man, wie zu jeder anderen Funktion, die Funktioscurve construiren. Wählt man z. B. in Fig. 9 AP = a und macht MD = F (a), DP = C = der Constanten, also beliebig grofs, so erhält man Punkt M. Ebenso wird Punkt N gefunden, wenn AG = b, NJ = F (b), JG = DP = Constanten gemacht wird. In gleichrr Weise werden die Constructionselemente aller übrigen Punkte bestimmt. Aus dieser Construction wird zunächst klar, dafs die Wahl der beliebigen Constanten auf den Lauf der Funktionscurve nicht influirt, indem eine Aenderung der Werthe C = DP = JG nichts weiter zur Folge

hat, als eine parallele Verschiebung der x-Achse. Unter der Voraussetzung, dafs F (x) zwischen den Grenzen F (a) bis F (b) eindeutig, stetig und endlich bleibt, lassen wir die Variable x die Werthe von x = a bis x = b continuirlich

Fig. 9.



durchlaufen und erhalten so den Bogen MN. Die Aenderung, welche y während dieses Laufes erleidet, wird hier durch NQ bezeichnet, und es ist :

$$NQ = [F(b) + C] - [F(a) + C)] = F(b) - F(a).$$

An dem noch nicht ausgeführten Integral bezeichnen wir diesen Funktionsunterschied so :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

und nennen einen solchen Ausdruck ein bestimmtes Integral.

Der Funktionsunterschied NQ kann aber auch aufgefafst werden als die Summe der kleinen Zu- und Abnahmen, welche y erfährt, indem x von a bis b stetig wächst, und nach dieser Auffassung würde F (b) — F (a) so zu berechnen sein : Man theilt PG = b — a in möglichst viele und daher sehr kleine gleiche Theile, d. h. man berechnet $\delta = \frac{b-a}{n}$, indem man n möglichst grofs wählt. Während nun der bewegliche Punkt

M nach dem möglichst nahe gelegenen Punkt B rückt und so das Curvenelement MB erzeugt, ändert sich y um den sehr kleinen Werth BH. Bei hinreichend feiner Theilung ist MB als grad und als dasjenige Element anzusehen, welches mit der Tangente in M zusammenfällt. Setzen wir Winkel BMH $= \alpha$, MH $= \delta$, so ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left[\frac{d\,F(x)}{dx}\right]_{x=a} = f(a),$$

$$BH = F(a+\delta) - F(a) = \delta \operatorname{tg} \alpha = \delta\, f(a).$$

Wird in dieser Weise von Punkt zu Punkt weiter gegangen bis zu N, so erhält man:

$$F(a+\delta) - F(a) = \delta\, f(a)$$
$$F(a+2\delta) - F(a+\delta) = \delta\, f(a+\delta)$$
$$F(a+3\delta) - F(a+2\delta) = \delta\, f(a+2\delta)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(b) - F[a+(n-1)\delta] = \delta\, f[a+(n-1)\delta]$$

und daraus durch Addition:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \delta[f(a) + f(a+\delta) + \ldots + f(a+(n-1)\delta)]$$

Der Sinn dieser Formel ist folgender: Soll man in einer Funktion f(x) die Variable von a bis b in möglichst kleinen Intervallen zunehmen lassen und die Werthe: f(a), f(a+δ), f(a+2δ) .... bilden, und soll man dann jeden dieser Werthe mit dem constanten, aber möglichst kleinen Zuwachs δ multipliciren und die so gewonnenen Produkte addiren, so kann man diese Summe viel einfacher so bilden, dafs man zu der gegebenen Funktion f(x) das unbestimmte Integral F(x) sucht und F(b) — F(a) berechnet. Hiernach ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

und daraus folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ist m ein Werth zwischen a und b, so ist:

$$\int_a^m f(x)\,dx = F(m) - F(a)$$

$$\int_m^b f(x)\,dx = F(b) - F(m)$$

$$\int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

317. $$\int_a^b m\,x^n\,dx = \frac{m}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

318. $$\int_{-2}^{+2} x^4\,dx = \frac{64}{5}$$

319. $$\int_a^b (a + b\,x)\,dx = \frac{2\,a\,b + b^3 - 2\,a^2 - a^2\,b}{2}$$

320. $$\int_0^3 (2\,x + 3\,x^2)\,dx = 36$$

321. $$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(1 + \frac{3\,x}{2} - x^2\right) dx = \frac{13}{48}$$

322. $$\int_0^{3\,a} \frac{x^2 - 3\,a\,x}{x - 4\,a}\,dx = a^2\left(\frac{15}{2} - 8\lg 2\right)$$

323. $$\int_3^5 \frac{x}{x^2 - 4}\,dx = \frac{1}{2}\lg\frac{21}{5}$$

324. $$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{4\,a}$$

325. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

326. $$\int_2^7 \frac{x}{x^2 + 2\,x - 3}\,dx = \frac{1}{4}\lg 6 + \frac{3}{4}\lg 2$$

327. $$\int_0^a dx\,\sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$$

328. $$\int_2^7 dx\,\sqrt{x + 2} = \frac{38}{3}$$

329. $$\int_0^a dx\,\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2\,\pi}{4}$$

330. $\int_0^a 3x\sqrt{x^2+4a^2}\,dx = a^3(5\sqrt{5}-8)$

331. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$

332. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$

333. $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

334. $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx = \frac{3a^2\pi}{8}$

335. $\int_0^{2b} dx\,\sqrt{2bx-x^2} = \frac{b^2\pi}{2}$

336. $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2}$

337. $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots2n}{3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}$

338. $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$

339. $\int_0^1 x\,e^x\,dx = 1$

340. $\int_0^2 e^{ax}\,dx = \frac{e^{2a}-1}{a}$

341. $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$

342. $\int_{-1}^{+1} a^x\,dx = \frac{a^2-1}{a\lg a}$

343. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lg 2$

344. $\int_1^e x^2\lg x\,dx = \frac{1+2e^3}{9}$

345. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$

346. $\int_0^{\pi} 2\,a \sin \frac{x}{2}\, dx = 4\,a$

347. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos x - 1)\, dx = 0{,}6848 \ldots$

348. $\int_0^{\pi} \sin m x\, dx = \frac{1 - \cos m \pi}{m}$

349. $\int_0^{\pi} \cos m x\, dx = \frac{\sin m \pi}{m}$

350. $\int_0^{\pi} \sin 2\,a\,x\, dx = 0$

351. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\,x\, dx = \frac{\pi}{4}$

352. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots\ldots 2\,n} \cdot \frac{\pi}{2}$

353. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots\ldots 2\,n}{3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n+1)}$

354. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos^6 x)\, dx = \frac{\pi}{32}$

355. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{1}{2}}$

356. $\int_0^{1} (1 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{3\,\pi}{32}$

Man setzt $x = \sin^3 \varphi$, und $\varphi = 0$ für $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für $x = 1$ als Grenze.

357. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x\, dx = \frac{3\,e^{\pi} - 1}{8}$

358. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \frac{4}{3}$

359. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{2} \lg 2$

360. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1$

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

§. 1. Tangente und Normale ebener Curven.

Wird an die Curve $y = f(x)$ durch den Punkt (x, y) eine Tangente gelegt, so ist deren Richtungscoëfficient $= \frac{dy}{dx}$, und ihre Gleichung:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \tag{1}$$

wenn Y, X die Variablen und x, y die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten. Erscheint die Curvengleichung in der impliciten Form: $f(x\,y) = o$, so mufs für $\frac{dy}{dx}$ der Werth $-\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ substituirt werden; man erhält dann als Gleichung der Tangente:

$$(Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} = o. \tag{2}$$

Diese Form der Tangente kann sehr leicht aus der homogenen Form der Curvengleichung abgeleitet werden. Bezeichnen wir durch $f_n(x\,y\,z) = o$ eine homogene Funktion vom n^{ten} Grad, so ist nach Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = n\,f(x\,y\,z) = o. \tag{3}$$

Wird in (2) für $-\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ der Werth $z\frac{\partial f}{\partial z}$ substituirt, so entsteht:

$$\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}z=0. \tag{4}$$

Um (2) aus der gegebenen Curvengleichung zu gewinnen, macht man dieselbe homogen, bestimmt die D.-Q. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ und setzt dieselben in (4) ein. Wird dann $z=1$ gesetzt, so geht (4) über in (2).

Beispiel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ist die gewöhnliche, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$ die homogene Form der Ellipsengleichung, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=-2z$. Homogene Form der Tangente: $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-z^2=0$. $z=1$ gibt $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0$ als gewöhnliche Form der Tangente.

Wird der Lauf einer Curve durch die beiden Gleichungen bestimmt: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, so ist $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, und die Gleichung der Tangente:

$$(Y-y)\frac{dx}{dt}-(X-x)\frac{dy}{dt}=0 \tag{5}$$

Ist endlich $r=f(t)$ die Gleichung einer Curve auf Polarcoordinaten bezogen, so ist: $x=r\cos t$; $y=r\sin t$; $\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos t-r\sin t$; $\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin t+r\cos t$.

Die Normale. Unter Normale verstehen wir die grade Linie, welche senkrecht zu einer Tangente durch deren Berührungspunkt gelegt ist. Ihr Richtungscoëfficient ist daher $=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Den verschiedenen Formen der Curvengleichung entsprechen die nachfolgenden Formen der Normalen:

$$y = f(x) \qquad (Y-y)\frac{dy}{dx} + (X-x) = 0 \qquad (6)$$

$$f(x\,y) = 0 \qquad (Y-y)\frac{\partial f}{\partial x} - (X-x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \qquad (Y-y)\frac{dy}{dt} + (X-x)\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (8)$$

Für die nachfolgenden Curven soll die Gleichung der Tangente aufgestellt werden :

1. Hyperbel : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; Tg. : $\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} - 1 = 0$.

2. Parabel : $y^2 - 2px = 0$; Tg. : $yY - p(X+x) = 0$.

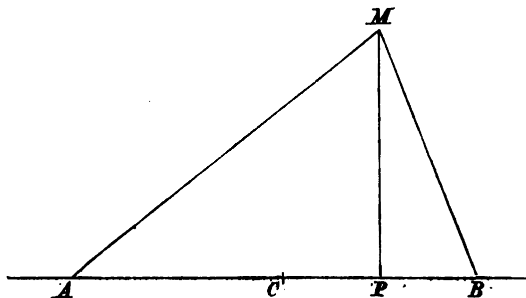
3. Neil'sche Parabel : $x^3 - py^2 = 0$; Tg. : $3x^2X - 2pyY - py^2 = 0$.

4. Cissoide : $y^2(2r - x) - x^3 = 0$; Tg. : $2y(x - 2r)Y + (3x^2 + y^2)X - 2ry^2 = 0$.

5. Decartes'sches Blatt : $x^3 - 3axy + y^3 = 0$; Tg. : $(x^2 - ay)X + (y^2 - ax)Y - axy = 0$.

6. Die Lemniskate ist das Resultat folgender Aufgabe : Zwei Punkte A und B sind durch ihre Entfernung $AB = 2e$

Fig. 10.



gegeben; man soll den geometrischen Ort aller Punkte M finden, so gelegen, daſs das Produkt der beiden Leitstrahlen MA und MB constant ist. Für $MA = r$, $MB = r_1$ muſs $r \times r_1 = a^2$ sein. $CA = CB = e$; $CP = x$, $MP = y$; $[y^2 + (e+x)^2][y^2 + (e-x)^2] = a^4$; $(y^2 + x^2)^2 = 2e^2(x^2 - y^2)$

$+ a^4 - e^4$. Dem besonderen Fall $a = e$ entspricht die Gleichung :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 a^2 (x^2 - y^2) = o.$$

Durch die Substitution : $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ erhält man als Polargleichung : $r = a \sqrt{2 \cos 2 t} = b \sqrt{\cos 2 t}$.

Wird in einem Kreise senkrecht zu einem Durchmesser eine Ordinate $= a$ gezogen, so zerlegt dieselbe den Durchmesser in 2 Theile, deren Produkt $= a^2$ ist, und die deshalb als Leitstrahlen zur Construktion eines Curvenpunktes benutzt werden können. Als Gleichung der Tangente findet man : $(x^2 + y^2 - a^2) x X + (x^2 + y^2 + a^2) y Y + a^2 (y^2 - x^2) = o$.

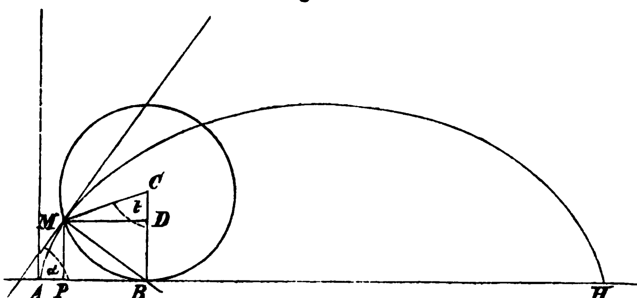
7. Logarithmische Linie : $y = a^x$; Tangente : $Y - y = a^x \lg a (X - x)$.

8. Kettenlinie : $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$; Tangente : $Y - y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)(X - x)$.

Da $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$ ist, so findet man den Richtungswinkel α einer Tangente, indem man aus der Ordinate des Berührungspunktes als Hypotenuse und m als Kathete ein rechtwinkeliges Dreieck construirt.

9. Die Cycloide. Wenn ein Kreis (Fig. 11) eine grade Linie AB in Punkt A berührt und dann auf der Graden hinrollt, so beschreibt der anfängliche Berührungspunkt A während einer vollständigen Umwälzung eine Cycloide. Jeder weiteren Umdrehung entspricht ein neuer, congruenter Curvenzweig. Es sei $AP = x$, $MP = y$, $MC = a$. Ist arc t mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, so ist $\operatorname{arc} MB = a t$. Da $AB = \operatorname{arc} MB$ sein mufs, so ist $x = AP = AB - MD = a (t - \sin t)$; $y = MP = CB - CD = a (1 - \cos t)$. Beide Gleichungen bestimmen zusammen den Lauf der Cycloide. Wird t eliminirt, so erhält man : $x = a \operatorname{arc} \cos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2 a y - y^2}$.

Fig. 11.



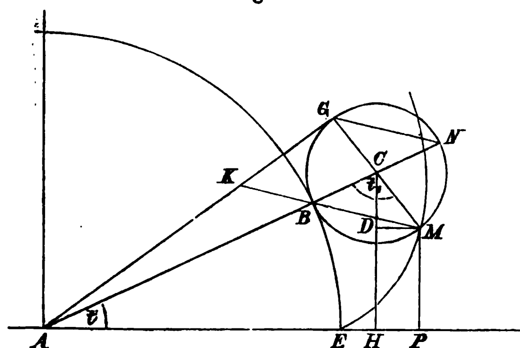
Gleichung der Tangente: $Y - y = \operatorname{cotg} \frac{t}{2} (X - x)$

„ „ Normale: $Y - y = - \operatorname{tg} \frac{t}{2} (X - x)$

Um zu beweisen, dafs die Normale in M durch den Berührungspunkt B des Erzeugungskreises geht, zeigen wir, dafs $X = a\,t$, $Y = o$, als Coordinaten von B, in Verbindung mit $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, als Coordinaten von M, der Gleichung der Normale genügen.

10. Die Epicycloide. Rollt der Kreis, dessen Mittelpunkt C ist (Fig. 12), auf dem festen Kreise mit dem Mittelpunkt A hin, so beschreibt Punkt M während einer Umwälzung den ersten Zweig einer Epicycloide.

Fig. 12.



Es sei: $AB = r$, $CB = a$, $AP = x$, $MP = y$, t und t_1 zwei Kreisbögen mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben. Weiter ist: $\text{arc}\,BE = r t$, $\text{arc}\,BM = a t_1$, $\text{arc}\,BE = \text{arc}\,BM$, oder $r t = a t_1$, d. h. $t_1 = \frac{r t}{a}$; $x = AH + DM$; $AH = (a + r) \cos t$; $DM = a \sin(t + t_1 - 90^0) = - a \cos(t + t_1) = - a \cos\left(\frac{a + r}{a}\right) t$; $y = CH - CD$; $CH = (a + r) \sin t$; $CD = a \cos(t + t_1 - 90^0) = a \sin(t + t_1) = a \sin\left(\frac{a + r}{a}\right) t$. So erhält man als Gleichung der Epicycloide:

$$x = (a + r) \cos t - a \cos\left(\frac{a + r}{a}\right) t$$

$$y = (a + r) \sin t - a \sin\left(\frac{a + r}{a}\right) t$$

Gleich. d. Tangente: $Y - y = \text{tg}\left(\frac{r + 2a}{2a}\right) t\,[X - x]$

„ „ Normale: $Y - y = - \text{cotg}\left(\frac{r + 2a}{2a}\right) t\,[X - x]$

Soll wieder bewiesen werden, dafs die Normale von M durch den Berührungspunkt B des Erzeugungskreises geht, so mufs man zeigen, dafs $X = r \cos t$, $Y = r \sin t$, als Coordinanten von B, in Verbindung mit den Werthen für x und y die Gleichung der Normale befriedigen.

11. Die Cardioide ist ein besonderer Fall der Epicycloide und entspricht der Bedingung $a = r$. Ihre Gleichung ist daher: $x = 2a \cos t - a \cos 2t = a(2 \cos t + 1 - 2 \cos^2 t)$; $y = 2a \sin t - a \sin 2t = 2a \sin t (1 - \cos t)$. Wird das System in der Weise transformirt, dafs man $a - x$ statt x setzt, so gibts: $x = 2a \cos t (\cos t - 1)$; $\frac{y}{x} = - \text{tg}\ t$; $\cos t = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $x^2 + y^2 = 4a^2(1 - \cos t)^2$; $(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2 y^2 = o$. Setzt man: $x = r \cos t$,

$y = r \sin t$, so gewinnt man wieder die Polargleichung: $r = 2a(1 + \cos t) = 4a \cos^2 \frac{t}{2}$.

12. Die Gleichung der Hypocycloide entsteht aus der Gleichung der Epicycloide, indem man dem Halbmesser des beweglichen Kreises das Vorzeichen wechselt, also $-a$ statt $+a$ setzt.

13. Die archimedische Spirale: $r = at$, oder $x = at \cos t$, $y = at \sin t$; Tg.: $(Y - y)(\cos t - t \sin t) - (X - x)(\sin t + t \cos t) = o$.

14. Die logarithmische Spirale: $r = a^t$;

Tg.: $\frac{Y - y}{X - x} = \frac{\lg a \sin t + \cos t}{\lg a \cos t - \sin t} = k$.

Der Richtungscoëfficient des Leitstrahls ist $k_1 = \operatorname{tg} t$. Man kann beweisen, dafs $\operatorname{tg} v = \frac{k - k_1}{1 + k k_1} = \frac{1}{\lg a}$, d. h. dafs der Winkel v, welchen die Tangente mit dem Leitstrahl bildet, bei dieser Curve constant ist.

§. 2. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte (Spitzen), conjugirte (isolirte) Punkte.

Wenn in Formel (2) durch die Coordinaten des Berührungspunktes $\frac{\partial f}{\partial x} = o$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = o$ wird, so nimmt $\frac{dy}{dx}$ die unbestimmte Form $\frac{o}{o}$ an, und damit wird für diesen Punkt die Richtung der Tangente unbestimmt. Als wahren Werth dieses unbestimmten Ausdrucks finden wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx}}{\dfrac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx}} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \dfrac{dy}{dx}},$$

und daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \tag{6}$$

Vorausgesetzt, dafs dieser Ausdruck nicht nochmals unbestimmt wird, gibt er uns für $\frac{dy}{dx}$ im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe, und daraus folgern wir, dafs die Curve in diesem Punkt zwei verschiedene Tangenten besitzt, was nur dadurch möglich wird, dafs sich 2 Curvenäste in diesem Punkt durchschneiden. Ein solcher Punkt wird Doppelpunkt genannt. Damit aber die beiden Werthe reell und verschieden ausfallen, mufs $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sein. Ist dagegen $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so fallen die beiden Tangenten in Eine zusammen, die Curvenschleife verschwindet alsdann, und der Doppelpunkt wird zu einem Rückkehrpunkt oder zu einer Spitze. Wird endlich $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so wird $\frac{dy}{dx}$ imaginär. Der Punkt gehört dann der Curve an, läfst aber keine Tangente zu, weil er mit den übrigen Theilen der Curve nicht in Verbindung steht. Wir nennen ihn einen isolirten oder conjugirten Punkt. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte und isolirte Punkte haben hiernach die gemeinsame Eigenschaft, dafs ihre Coordinaten den Gleichungen

$$f(x\, y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

genügen müssen. Aber man hat

Einen Doppelpunkt,	wenn	$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2$	$>$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	(8)
„ Rückkehrpunkt,	„	„	$=$	„	(9)
„ isolirten Punkt,	„	„	$<$	„	(10)

Wird aus (6) der Werth für $\frac{dy}{dx}$ in (1) substituirt, so entsteht die für die Variablen X und Y quadratische Gleichung:

$$(Y-y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2(Y-y)(X-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + (X-x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad (11)$$

deren geometrischer Ort die beiden Tangenten des Doppelpunktes sind. Für den Rückkehrpunkt müssen die 3 Glieder dieser Gleichung ein vollständiges Quadrat bilden.

Ist die Curve durch die beiden Gleichungen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so wird für den Doppelpunkt die Gleichung der Tangente (5) nicht unbestimmt, und das Kriterium des Doppelpunktes wird ein ganz anderes, als bisher. Der Doppelpunkt hat dann die Eigenthümlichkeit, dafs 2 ganz verschiedene Werthe von t gleiche Werthe für x und y erzeugen müssen. Wir drücken diese Bedingung so aus:

$$x = \varphi(t) = \varphi(t_1); \quad y = \psi(t) = \psi(t_1). \qquad (12)$$

Die Lösungen beider Gleichungen sind die Parameter der Doppelpunkte. Wird ein zusammengehöriges Werthpaar t und t_1 nach einander in (5) substituirt, so erhält man die beiden Tangenten eines Doppelpunktes.

Rücken die Werthe t und t_1, welche einem Doppelpunkt entsprechen, einander immer näher, so wird die Curvenschleife immer kleiner und verschwindet zuletzt ganz, wenn t mit t_1 zusammenfällt. Der Punkt wird dadurch zu einem Rückkehrpunkt; für ihn mufs nicht nur $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, $\psi(t) = \psi(t_1)$ sein, sondern auch t_1 mit t zusammenfallen. Hiernach müssen die Parameter der Rückkehrpunkte den beiden Bedingungsgleichungen genügen:

$$\lim \frac{\varphi(t) - \varphi(t_1)}{t - t_1} = 0, \qquad \lim \frac{\psi(t) = \psi(t_1)}{t - t_1} = 0, \quad \text{oder}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0 \qquad (13)$$

Der Richtungscoëfficient $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ erscheint jetzt in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und hat den wahren Werth: $\frac{d^2y}{dt^2} : \frac{d^2x}{dt^2}$. Die Gleichung der Tangente eines Rückkehrpunktes ist dann:

$$(Y - y)\frac{d^2x}{dt^2} - (X - x)\frac{d^2y}{dt^2} = o \tag{14}$$

15. Die Lemniskate: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = o$ hat in $x = o$, $y = o$ einen D.-P., dessen beide Tangenten: $Y = \pm X$ unter Winkeln von 45^0 und 135^0 die x-Achse durchschneiden, also zu einander senkrecht sind.
16. Cissoide: $y^2(2r - x) - x^3 = o$; Spitze: $x = o$, $y = o$; Tg.: $Y = o$.
17. Neil'sche Parabel: $x^3 - py^2 = o$; Spitze: $x = o$, $y = o$; Tg.: $Y = o$.
18. $f = x^4 + a^2x^2 - a^2y^2 = o$; D.-P.: $x = o$, $y = o$; Tg.: $Y = \pm X$.
19. $f = x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = o$; Spitze: $x = 1$, $y = 1$; Tg.: $(Y + X - 2)^2 = o$.
20. $f = y^2 - x^3 - x^2 = o$; D.-P.: $x = y = o$; Tg.: $Y = \pm 2X$.
21. $f = x^4 + y^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = o$; D.-P.: $x = \pm b$, $y = o$; Tg.: $Y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2}(X + b)$; $Y = \pm \frac{b\sqrt{2}}{a}(X - b)$.
22. $f = x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = o$; D.-P.: $x_1 = a$, $y_1 = o$; $x_2 = -a$, $y_2 = o$; $x_3 = o$, $y_3 = -a$; Tg.: $Y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X - a)$; $Y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X + a)$; $Y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}X - a$.
23. $f = (y - b)^2 - (x - a)^5 = o$; Spitze: $x = a$, $y = b$; Tg.: $Y = b$.
24. $f = 5y^2 + 10y - x^3 + 2x^2 + 5 = o$. Der Punkt $x = o$, $y = -1$ ist ein conjugirter Punkt.
25. $f = (y - x)^2 - x^3 = o$; $x = o$, $y = o$ eine Spitze. Tg.: $Y = X$.
26. $f = ay^2 - x^3 + bx^2 = o$; $x = o$, $y = o$ ein conjugirter Punkt.
27. $f = y^2 - (2 - x)^2(1 - x) = o$; $x = 2$, $y = o$ ein conjugirter Punkt.

28. Fufspunktenlinie der Ellipse : $ax^2 + by^2 - (x^2+y^2)^2 = o$; $x = o$, $y = o$ ein conjugirter Punkt.

29. $y = ax + b\sqrt{\sin x - 1}$ stellt ein System isolirter Punkte vor : $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $y_1 = \frac{a\pi}{2}$; $x_2 = \pi$, $y_2 = a\pi$ u. s. w., die alle auf der Graden $y = ax$ liegen.

30. Die Cycloïde : $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\varphi'(t) = a(1 - \cos t) = o$, $\psi'(t) = a \sin t = o$. Da beiden Gleichungen die Lösungen $t = o$, 2π, 4π u. s. w. genügen, so sind $x_1 = 2a\pi$, $y_1 = o$; $x_2 = 4a\pi$, $y_2 = o$ u. s. w. Rückkehrpunkte. Die Tangenten sind senkrecht zur Achse.

31. Die Evolute der Ellipse : $x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$, $y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t$ hat 4 Spitzen, welchen die Parameter : o, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ entsprechen.

§. 3. Krümmungskreis und Evolute.

Wählt man auf einer Curve 3 beliebige Punkte 1, 2, 3, zieht die Sehnen 1 — 2 und 2 — 3, und errichtet in der Mitte beider je eine Senkrechte, so ist der Schnittpunkt dieser Senkrechten der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die 3 Punkte geht. Indem diese mehr und mehr einander näher rücken, werden die Sehnen immer kürzer und in der Grenze zu Curvenelementen, welche zugleich auch dem Kreis angehören. Die beiden Senkrechten werden dabei zu zwei unendlich nahe gelegenen Normalen, und der Kreis selbst wird zum Krümmungskreis. Die Stärke der Krümmung einer Curve in einem bestimmten Punkt wird gemessen durch die Gröfse der Krümmung des dem betreffenden Punkt zugehörigen Krümmungskreises, und da diese mit wachsendem Halbmesser $= \varrho$ abnimmt, so ist der reciproke Werth dieses Halbmessers, nämlich $\frac{1}{\varrho}$, ein Ausdruck für das Mafs der

Krümmung. Wir beginnen die Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes bei der Gleichungsform : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, legen durch zwei vorerst noch endlich entfernte Punkte $x\,y$ und $x_1\,y_1$ zwei Normalen und bestimmen deren Schnittpunkt. Die Gleichungen dieser Normalen sind :

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (15)$$

$$(X - x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + (Y - y_1)\frac{dy_1}{dt_1} = 0 \qquad (16)$$

Die Coordinaten X und Y des Schnittpunktes werden gefunden, indem man aus (15)

$$\frac{X - x}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{Y - y}{\frac{dx}{dt}} = m, \text{ oder}$$

$$X = x + m\frac{dy}{dt}, \qquad Y = y - m\frac{dx}{dt} \qquad (17)$$

setzt, diese Werthe in (16) substituirt und so zunächst eine Gleichung für m herstellt.

$$\left(x + m\frac{dy}{dt} - x_1\right)\frac{dx_1}{dt_1} + \left(y - m\frac{dx}{dt} - y_1\right)\frac{dy_1}{dt_1} = 0$$

$$m = \frac{(x - x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + (y - y_1)\frac{dy_1}{dt_1}}{\frac{dx}{dt}\frac{dy_1}{dt_1} - \frac{dy}{dt}\frac{dx_1}{dt_1}} \qquad (18)$$

Wird dieses m in (17) substituirt, so gewinnen wir den Schnittpunkt zweier endlich entfernten Normalen. Da aber dieser Schnittpunkt unter der Voraussetzung gefunden werden soll, dafs die Normalen unendlich wenig von einander entfernt sind, so ist in (18) ein Grenzübergang auszuführen und dieser Ausdruck zunächst entsprechend umzuformen.

$$m = \frac{\left[\frac{x - x_1}{t - t_1}\right]\frac{dx_1}{dt_1} + \left[\frac{y - y_1}{t - t_1}\right]\frac{dy_1}{dt_1}}{\left[\frac{\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]\frac{dy}{dt} - \left[\frac{\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]\frac{dx}{dt}} \qquad (19)$$

Geht man jetzt zur Grenze über, so wird

$$m = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}} \tag{20}$$

Nun werden die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes gefunden, wenn man dieses m in (17) substituirt.

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}} \\ Y &= y - \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Entfernung der beiden Punkte X Y und x y, oder der Krümmungshalbmesser, wird nach folgenden Formeln berechnet:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = m\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^3}}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}} \end{aligned} \tag{22}$$

Geht in dieser Entwicklung t über in x, so wird $y = \psi(x)$ oder $= f(x)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dt} = 1$, und daher:

$$m = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{23}$$

$$X = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{24}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} . \tag{25}$$

Ist die Gleichung in Polarcoordinaten gegeben und von der Form : $r = f(t)$, so ist $x = r \cos t$, $y = r \sin t$. Die Formeln (21) und (22) gehen dann in folgende über :

$$Y = y + \frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt} \cos t - r \sin t\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}} \tag{26}$$

$$X = x - \frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt} \sin t + r \cos t\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}} \tag{27}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]^3}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}} \tag{28}$$

Wenn endlich die implicite Funktion $f(x\,y) = o$ die Curvengleichung repräsentirt, so werden nach (7) zwei zunächst wieder endlich von einander entfernte Normalen der Punkte $x\,y$ und $x_1\,y_1$ durch folgende Gleichungen ausgedrückt :

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial x} = o \tag{29}$$

$$(X - x_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - (Y - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} = o \tag{30}$$

Zur Bestimmung der Schnittpunktscoordinaten $X\,Y$ setzt man aus (29)

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = m,$$

substituirt dann

$$X = x + m\frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = y + m\frac{\partial f}{\partial y} \tag{31}$$

in (30) und erhält:

$$\left(x - x_1 + m\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y_1} - \left(y - y_1 + m\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$m = \frac{(x_1 - x)\frac{\partial f}{\partial y_1} - (y_1 - y)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x_1}}$$

$$m = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}}{x_1 - x}\right] - \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x}}{x_1 - x}\right]\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{32}$$

Rücken beide Normalen unendlich nahe zusammen, so wird ihr Schnittpunkt zum Krümmungsmittelpunkt. Hierbei sind in dem Werth von m folgende Grenzübergänge auszuführen: $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ wird $= \frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}$; $\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx}$;

$$\lim\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}}{x_1 - x}\right] = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx};$$

$$\lim\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x}}{x_1 - x}\right] = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Werden diese Werthe in (32) substituirt und $-\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt, so erhält man denjenigen Werth von m, welcher, in (31) substituirt, uns X und Y als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes gibt. Man erhält:

$$m = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \tag{33}$$

$$\varrho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = m \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^3}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \qquad (34)$$

Jedem Punkt der gegebenen Curve entspricht ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte wird Evolute genannt. Die beiden Gleichungen für X und Y bestimmen zusammen den Lauf dieser Evolute.

Die Elemente des Krümmungskreises für die folgenden Curven zu bestimmen :

32. Der Kreis : $x^2 + y^2 - r^2 = o$; $m = -\frac{1}{2}$, $X = o$, $Y = o$, $\varrho = r$. Der K.-K. fällt ganz mit dem gegebenen Kreis zusammen.

33. Die Ellipse : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.
$m = -\frac{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}{a\,b}$; $X = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $Y = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$.
Wird aus beiden Gleichungen die Variable t eliminirt, so erhält man als Gleichung der Evolute : $\sqrt[3]{b^2 Y^2} + \sqrt[3]{a^2 X^2} = \sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}$. Auch ist $X = \frac{a^2-b^2}{a^4} x^3$, $Y = -\frac{a^2-b^2}{b^4} y^3$.

34. Die Hyperbel : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$m = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)\frac{a^2 b^2}{2}$$

$$X = \frac{a^2+b^2}{a^4} x^3,\quad Y = -\frac{a^2+b^2}{b^4} y^3$$

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

35. Die Parabel: $y^2 - 2px = o$; $m = -\frac{y^2+p^2}{2p^2}$; $X = 3x + p$, $Y = -\frac{y^3}{p^2}$; $x = \frac{X-p}{3}$, $y^2 = \sqrt[3]{p^4 Y^2}$ in die Parabelgleichung substituirt, gibt als Evolute: $Y^2 = \frac{8}{27p}(X-p)^3$. Wird X statt $X - p$ gesetzt, oder der Anfangspunkt des Systems um p verschoben, so erhält man als Evolute die Neil'sche Parabel: $Y^2 = \frac{8}{27p} X^3$. Weiter ist $\varrho = \frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2+y^2)^3}$.

36. Die Cissoide: $x^3 - y^2(2r - x) = o$

$$X = \frac{-rx(12r-5x)}{3(2r-x)^2}, \; Y = \frac{8r\sqrt{x}}{3\sqrt{(2r-x)}}; \; \varrho = \frac{r\sqrt{x(8r-3x)^3}}{3(2r-x)^2}$$

37. Die Kettenlinie: $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$

$$X = x - \frac{m}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right), \; Y = y + \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = 2y;$$

$$\varrho = \frac{m}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 = \frac{y^2}{m}.$$

Das Normalestück zwischen der Curve und der Abscissenachse wird bei jeder Curve nach der Formel berechnet: $N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Da man hiernach bei der Kettenlinie $N = \frac{y^2}{m}$ findet, so ist der Krümmungshalbmesser der Normale gleich.

38. Die Cycloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $m = 2$; $X = a(t + \sin t)$, $Y = -a(1 - \cos t) = -y$. Beide Gleichungen repräsentiren zusammen die Evolute der Cycloide. Setzt man $t_1 + \pi$ statt t, so wird: $X - a\pi = a(t_1 - \sin t_1)$, $Y + 2a = a(1 - \cos t_1)$; wird jetzt $X - a\pi$ durch X_1, $Y + 2a$ durch Y_1 ersetzt, was einer Verschiebung des Anfangspunktes um $a\pi$ und

$-2a$ entspricht, so erhält man als Gleichung der Evolute:

$$X_1 = a(t_1 - \sin t_1), \quad Y_1 = a(1 - \cos t_1),$$

und daraus folgt, dafs die Evolute eine congruente Cycloide ist, die sich nur hinsichtlich der Lage dadurch von der gegebenen unterscheidet, dafs ihr Anfangspunkt um $a\pi$ und $-2a$ verschoben ist. Wir finden $\varrho = 4a \sin \frac{t}{2}$, und da die Normale $= 2a \sin \frac{t}{2}$ gefunden wird, so ist der Krümmungshalbmesser der doppelten Normale gleich. Um den Krümmungsmittelpunkt zu construiren, hat man die Normale nur um sich selbst zu verlängern.

39. Die Epicycloide: $x = (a + r)\cos t - a \cos \left(\frac{a + r}{a}\right) t$,

$$y = (a + r)\sin t - a \sin \left(\frac{a + r}{a}\right) t; \quad m = -\frac{2a}{r + 2a}$$

$$X = \frac{r}{r + 2a}\left[(a + r)\cos t + a \cos \left(\frac{a + r}{a}\right) t\right]$$

$$Y = \frac{r}{r + 2a}\left[(a + r)\sin t + a \sin \left(\frac{a + r}{a}\right) t\right]$$

$$\varrho = \frac{4a(r + a)}{r + 2a} \sin \frac{r}{2a} t$$

Der Kr.-Mittelpunkt wird auf folgende Weise construirt: Man zieht (Fig. 12) den Durchmesser MG, verbindet G mit A und verlängert die Normale MB; der Schnittpunkt K ist der gesuchte Kr.-Mittelpunkt und KM der Kr.-Halbmesser. Da GN parallel BM sein mufs, so ist $KB = \frac{r}{r + 2a} GN = \frac{r}{r + 2a} BM$, und

$$KM = \left(1 + \frac{r}{r + 2a}\right) BM = \frac{2(a + r)}{2a + r} BM =$$

$$\frac{2(a + r)}{2a + r} 2a \sin \frac{t_1}{2} = \frac{4(a + r)}{2a + r} \sin \frac{rt}{2a} = \varrho.$$

40. Die Lemniskate: $r = a\sqrt{\cos 2t}$.

$$X = \frac{2a\cos^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}},\quad Y = -\frac{2a\sin^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}};\quad \varrho = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2t}} = \frac{a^2}{3r}.$$

Da $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, so ist $x^2 + y^2 = a^2\cos 2t$, oder $\cos 2t = \frac{x^2+y^2}{a^2}$, $\varrho = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}$. Drückt man $\sin^2 t$ und $\cos^2 t$ durch die Coordinaten des Kr.-Mittelpunktes aus, so gewinnt man mit Hilfe der beiden Relationen: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ und $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ die Gleichung der Evolute: $3(X^{2/3} + Y^{2/3})\sqrt{X^{2/3} - Y^{2/3}} = 2a$.

41. Die logarithmische Spirale: $r = a^t$.
$X = -\lg a\, a^t \sin t$, $Y = \lg a\, a^t \cos t$; $\varrho = a^t\sqrt{1 + (\lg a)^2}$.
Um die Polargleichung der Evolute zu erhalten, setze man den Leitstrahl $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \lg a\, a^t$. Wird $\lg a = a^\varepsilon$ gesetzt, so ist $R = a^{t+\varepsilon}$, d. h. die Evolute dieser Spirale ist eine gleiche Spirale, welche nur um den Bogen ε gedreht ist.

§. 4. Die Wende- oder Inflexionspunkte.

Liegen 3 unendlich nahe Punkte einer Curve in einer graden Linie, so wird der Krümmungshalbmesser an dieser Stelle unendlich grofs. Weil in solchen Punkten die Curve die Art ihrer Krümmung ändert, so werden sie Inflexions- oder Wendepunkte genannt. Verbinden wir die Bedingungsgleichung für das Unendlichwerden des Krümmungshalbmessers mit der Funktionsgleichung der Curve, so erhalten wir als Lösungen beider Gleichungen die Coordinaten aller Wendepunkte.

Ist $f(x\,y) = o$ die gegebene Gleichung, so wird nach (34) ϱ unendlich, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = o.$$

In der Form einer Determinante heifst diese Bedingungsgleichung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & o \end{vmatrix} = o \qquad (35)$$

Wird die dritte Vertikalreihe mit (n—1) multiplicirt, die ganze Determinante durch (n—1) dividirt und o durch n f ersetzt, so gibts:

$$\Delta = \frac{1}{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & n\,f \end{vmatrix} = o \qquad (36)$$

Multiplicirt man nun die erste Vertikalreihe mit x, die zweite mit y und zieht ihre Summe von der dritten ab, so wird:

$$\Delta = \frac{1}{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & n\,f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = o \qquad (37)$$

Wird jetzt die gegebene Funktion $f(x\,y) = o$ in die homogene Funktion $f(x\,y\,z) = o$ umgewandelt, so kann der Lehrsatz von Euler: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = n\,f$, wenn n den Grad der Funktion anzeigt, zur Anwendung kommen. Da aber $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ wieder homogene Funktionen sein müssen, und zwar vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, so ist nach demselben Satz:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}&=(n-1)\frac{\partial f}{\partial x}\\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}&=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y}\\ x\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}+z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}&=(n-1)\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \qquad (38)$$

Mittelst dieser Relationen bringt man (37) auf die Form:

$$\varDelta=\frac{1}{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & z\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & z\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}=o \qquad (39)$$

Wird in dieser Determinante wieder $z = 1$ gesetzt, so bildet sie die Bedingungsgleichung für das Unendlichwerden des Kr.-Halbmessers. Sie geht leicht in folgende über:

$$\varDelta=\frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\\ (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}=o$$

Multiplicirt man die erste Horizontalreihe mit x, die zweite mit y und zieht die Summe von der dritten ab, substituirt dann für die Elemente der dritten Reihe die Werthe aus (38) und setzt dabei $z = 1$, unterdrückt ferner den constanten Factor, so erhält man:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}=o \qquad (40)$$

Die reellen Wurzeln der beiden Gleichungen $f = o$ und $\varDelta = o$ lehren uns die Wendepunkte der Curve kennen. Ist $f = o$ vom n^{ten} Grad, so mufs die Inflexions-Determinante

vom $3(n-2)^{ten}$ Grad sein. Beide Gleichungen lassen daher im Allgemeinen $3n(n-2)$ Lösungen zu, und die Curve hat eben so viele Wendepunkte. Curven des zweiten Grades können demnach keine Wendepunkte besitzen.

Ist die Curve durch die beiden Gleichungen gegeben: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so wird der Krümmungshalbmesser nach (22) unendlich, wenn

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \tag{41}$$

und aus dieser Gleichung entnehmen wir die Parameter der Wendepunkte.

Für die Form: $y = f(x)$ wird nach (23) der Krümmungshalbmesser unendlich, wenn

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{42}$$

Die Wendepunkte folgender Curven zu finden:

42. $f = x^3 + y^3 + 6axy + 1 = 0$. Homogene Form: $x^3 + y^3 + 6axyz + z^3 = 0$.

$$\varDelta = 6^3 \begin{vmatrix} x & az & ay \\ az & y & ax \\ ay & ax & z \end{vmatrix}$$

$\varDelta = xyz(1 + 2a^3) - a^2(x^3 + y^3 + z^3) = 0$; $z = 1$ gibt: $x^3 + y^3 + 1 - \frac{1+2a^3}{a^2} xy = 0$. Aus dieser Gleichung und $f = 0$ finden wir: $x = 0$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 0$ als Coordinaten der Wendepunkte.

43. $f = x^3 - 3ax^2 + c^2y = 0$. Homog. Form: $x^3 - 3ax^2z + c^2yz^2 = 0$.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 6(x - az) & 0 & -6ax \\ 0 & 0 & 2c^2z \\ -6ax & 2c^2z & 2c^2y \end{vmatrix}$$

$\varDelta = 24(x - a)c^4 = 0$. Aus $\varDelta = 0$ und $f = 0$ findet man $x = a$, $y = \frac{2a^3}{c^2}$ als Coordinaten eines Wendepunktes.

44. $f = x^2 y - x + y = o$, oder $x^2 y - x z^2 + y z^2 = o$.
$\Delta = x^3 - x^2 y - 2x - y = o$. Wendepunkte: $x = o$, $y = o$; $x = \pm \sqrt{3}$, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$.

45. $f = (a - x)^5 - y = o$; $\Delta = (a - x)^3 = o$; Wendepunkt: $x = a$, $y = o$.

46. $f = x^4 - a^2 x^2 + a^3 y = o$; Wendepunkt: $x = \pm \frac{a}{\sqrt{6}}$, $y = \frac{5a}{36}$.

47. $f = y - x^3 = o$; Wendepunkt: $x = o$, $y = o$.

48. Die Wendepunkte eines Kegelschnitts sollen aus der allgemeinen Gleichung: $A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x + F = o$ gefunden werden.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2C & B & E \\ B & 2A & F \\ E & D & 2F \end{vmatrix}$$

Da die Relation: $\Delta = o$ durch keinen besonderen Werth von x und y erfüllt werden kann, so haben Kegelschnitte im Allgemeinen keine Wendepunkte. Ist aber diese Verbindung von Constanten $= o$, so ist jeder Punkt des Kegelschnitts ein Wendepunkt, und der Kegelschnitt besteht dann aus einem System von graden Linien.

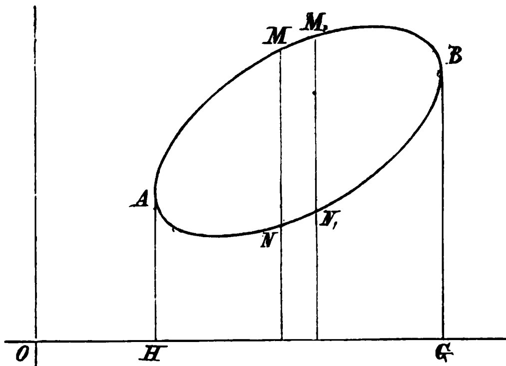
49. Die Wendepunkte der Curve $y = \sin x$ zu finden.
$x = \pi$, 2π, 3π u. s. w., $y = o$.

§. 5. Der Flächeninhalt begrenzter Figuren.

Um das von der Curve AMBNA eingeschlossene Flächenstück (Fig. 13) zu finden, theilen wir dasselbe durch möglichst nahe gelegene Ordinaten in lauter elementare Streifen wie MNN_1M_1, die unter dieser Voraussetzung als schmale Rechtecke angesehen werden können.

Ist $MP = Y_i$, $NP = y_i$, $M_1P_1 = Y_{i+1}$, $N_1P_1 = y_{i+1}$, $OP = x_i$, $OP_1 = x_{i+1}$, $OH = \alpha$, $OG = a$, so ist die Fläche

Fig. 13.



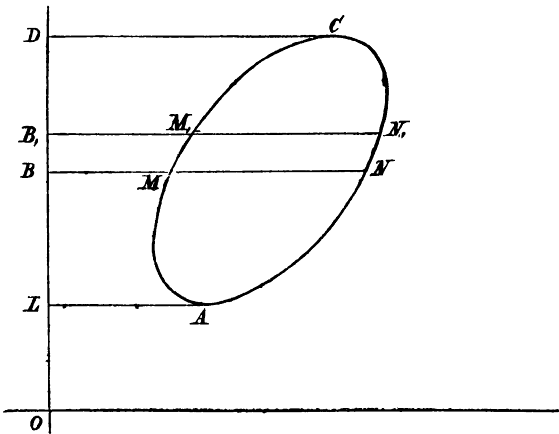
eines solchen Rechtecks MNN_1M_1 $(Y_i - y_i)(x_{i+1} - x_i)$, und die Summe aller Rechtecke, oder die ganze Fläche :

$$\text{Fl. AMBNA} = \Sigma\,(Y_i - y_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^a (Y - y)\,dx \quad (43)$$

Wenn statt der Curve ANB die Achse HG als untere Grenze eintritt, so ist $y = o$ zu setzen. Man hat dann :

$$\text{Fl. HAMBGH} = \int_a^a Y\,dx \quad (44)$$

Fig. 14.



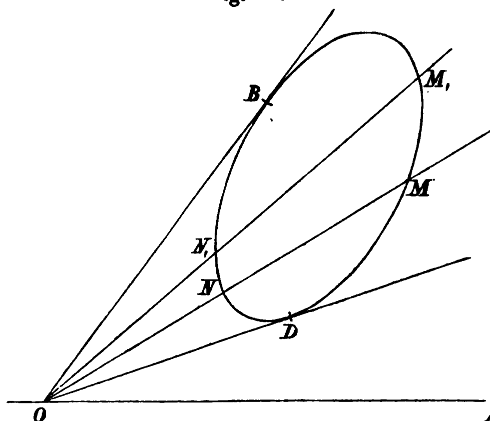
Wird die Fläche durch Linien, welche parallel zur x-Achse liegen, in elementare Streifen, wie MNN_1M_1 zerlegt und MB $= x_i$, NB $= X_i$, OB $= y_i$, $OB_1 = y_{i+1}$, OL $= \beta$, OD $=$ b gesetzt, so ist $MM_1N_1N = (X_i - x_i)(y_{i+1} - y_i)$, und

$$\text{Fl. AMCNA} = \Sigma (X_i - x_i)(y_{i+1} - y_i) = \int_\beta^b (X - x)\, dy \quad (45)$$

Wieder wird $\text{Fl. ALDCNA} = \int_\beta^b X\, dy$ (46)

Ist endlich die Curve in Polarcoordinaten gegeben, so zerlege man dieselbe in elementare Streifen von der Form

Fig. 15.



MM_1N_1N und setze OM $=$ R, ON $=$ r, $OM_1 = R_1$, $ON_1 = r_1$, Wkl. MOA $=$ t, Wkl. $M_1OA = t_1$, Wkl. DOA $= \gamma$, Wkl. BOA $=$ C. Da unter dieser Voraussetzung die Bögen MM_1 und NN_1 als grade Linien anzusehen sind, so ist:

$$\text{Fl. } NMM_1N_1 = \frac{(R R_1 - r r_1) \sin (t_1 - t)}{2}$$

$$\text{Fl. BNDMB} = \frac{\Sigma (R R_1 - r r_1) \sin (t_1 - t)}{2} = \int_\gamma^C \frac{R^2 - r^2}{2} dt, \quad (47)$$

weil in der Grenze $R_1 = R$, $r_1 = r$ und $\sin(t_1 - t) = \operatorname{arc}(t_1 - t) = dt$ wird. Soll wieder die Fläche OBMDO berechnet werden, so ist r $=$ o zu setzen, wodurch entsteht:

$$\text{Fl. OBMDO} = \int_{\gamma}^{c} \frac{R^2}{2}\, dt \qquad (46)$$

50. Man soll das Flächenstück berechnen, welches zwischen einem Parabelbogen und der x-Achse liegt; $y^2 = 2\,p\,x$.

$$\text{Fl.} = \int_0^x y\, dx = \int_0^x \sqrt{2\,p\,x}\, dx = \frac{2}{3}\, x\, y$$

Der Parabelbogen, vom Anfangspunkt gerechnet, theilt das aus Abscisse und Ordinate des Endpunktes construirte Rechteck so, dafs zwei Drittheile desselben die Parabelfläche bilden.

51. Die Fläche eines Kreises zu finden; $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.

$dx = -\, r \sin t\, dt$; für $x = o$ ist $t = \frac{\pi}{2}$, für $x = r$ ist $t = o$.

$$\text{Fl.} = 4\int_0^r y\, dx = -\,4\int_{\frac{\pi}{2}}^{o} r^2 \sin^2 t\, dt = 4\, r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = r^2 \pi$$

52. Die Fläche einer Ellipse zu finden; $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

$$\text{Fl.} = 4\int_0^a y\, dx = -\,4\int_{\frac{\pi}{2}}^{o} a\, b \sin^2 t\, dt = 4\, a\, b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = a\, b\, \pi$$

53. Man soll das Flächenstück berechnen, welches zwischen einem Hyperbelbogen und einer zur x-Achse senkrechten Sehne liegt; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Fl.} = 2\int_a^x y\, dx = 2\, b \int_a^x dx \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Zum Zweck der Transformation setzen wir $x = a\,\frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = b\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}$, durch welche Werthe die Curvengleichung befriedigt wird. Da $x = a$ wird für $t = o$, und $dx = a\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}\, dt$ ist, so ist

$$\text{Fl.} = \frac{ab}{2}\int_0^t (e^t - e^{-t})^2\, dt = \frac{ab}{2}\left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} - 2t\right) = xy - abt$$

Ferner ist $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = e^t$, oder $t = \lg\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$.

$$\text{Fl.} = xy - ab \lg\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

54. Man zeichne eine Hyperbel nebst ihren beiden Asymptoten. Curvengleichung : $xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = m^2$. Es sei A der Anfangspunkt des Systems, S der Scheitel, SB die Ordinate, AB = p die Abscisse des Scheitels; MD die Ordinate, AD = x die Abscisse des beliebigen Puntes M, α der Asymptotenwinkel. Die Fläche SBDM soll berechnet werden.

Weil das System schiefwinkelig ist, so ist das Differential der Fläche $= \sin\alpha\, y\, dx$, und

$$\text{Fl.} = \sin\alpha \int_p^x \frac{m^2}{x}\, dx = m^2 \sin\alpha\, (\lg x - \lg p).$$

55. Die Fläche zwischen einer Cycloide und ihrer x-Achse zu finden; $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$\text{Fl.} = \int_0^{2a\pi} y\, dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = 3a^2\pi.$$

56. Eine Curve hat die Gleichung : $x = a(1 - \cos t)$, $y = at$; man soll die Fläche zwischen der Curve und der x-Achse finden für $t = o$ bis $t = 2\pi$.

$$\text{Fl.} = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t\, dt = 4a^2\pi.$$

57. Die Fläche zu berechnen, welche von einer Epicycloide und den beiden nach ihren Endpunkten gezogenen Halbmessern des Grundkreises eingeschlossen wird; $x = (a + r)\cos t - a\cos\left(\frac{a + r}{a}\right)t$, $y = (a + r)\sin t - a\sin\left(\frac{a + r}{a}\right)t$.

Denken wir uns (Fig. 12) die angefangene Curve EM vollendet und an den Endpunkt P gesetzt, so soll die Fläche AEMPA berechnet werden. Man ziehe Leitstrahl AM = R und setze Wkl. MAE = φ, so ist:

$$\text{Fl. AEMA} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} R^2\, d\varphi.$$

Da aber $R^2 = x^2 + y^2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, $\cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, wenn x y die Coordinaten von M sind, so ist:

$$d\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{dt} = \frac{d\,\frac{y}{x}}{dt}, \text{ oder } \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{R^2} = \frac{(a+r)\,(2a+r)\left[1 - \cos\frac{r}{a}\,t\right]}{R^2}$$

$$\text{Fl.} = \frac{1}{2}\int_0^t R^2\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \frac{(a+r)\,(2a+r)}{2}\int_0^t\left(1 - \cos\frac{r}{a}\,t\right)dt.$$

Für die Fläche AEMPA hat der Erzeugungskreis eine ganze Umdrehung vollendet, so dafs $r\,t = 2\,a\,\pi$, oder $t = \frac{2\,a\,\pi}{r}$ sein mufs.

$$\text{Fl. AEMPA} = \frac{(a+r)\,(2a+r)}{2}\int_0^{\frac{2a\pi}{r}}\left(1-\cos\frac{r}{a}\,t\right) = \frac{(a+r)(2a+r)a\pi}{r}$$

Wird davon der Kreisausschnitt AEPA = $a\,r\,\pi$ abgezogen, so bleibt die Fläche EMPBE zurück.

58. Die Cardioidenfläche erhält man aus der vorhergehenden Formel, indem man r = a setzt. Fl. = $6\,a^2\,\pi$.

59. Die Fläche der Lemniskate: $R^2 = a^2 \cos 2\,t$ zu finden.

$$\text{Fl.} = 2\,a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\,t = a^2.$$

60. Die Fläche der archimedischen Spirale: R = a t soll für einen Umlauf des Leitstrahls gefunden werden.

$$\text{Fl.} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{4\,a^2\,\pi^3}{3}.$$

§. 6. Rectification ebener Curven.

Sind M und M_1 zwei beliebige Curvenpunkte, x y und x_1 y_1 deren Coordinaten, so ist die Sehne

$$MM_1 = s = \sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2} = (x-x_1)\sqrt{1+\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)^2}$$

Beim Grenzübergang erhält man als Differential des Bogens

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Sind α und a die Abscissen der beiden Punkte A und B, so ist:

$$S = \text{arc } AB = \int_\alpha^a dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{47}$$

Soll arc AB aus den Ordinaten der Endpunkte berechnet werden, so setze man

$$s = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = (y-y_1)\sqrt{1+\left(\frac{x-x_1}{y-y_1}\right)^2},$$

woraus beim Grenzübergang entsteht: $ds = dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, und, wenn β und b die Ordinaten der Endpunkte A, B sind:

$$S = \text{arc } AB = \int_\beta^b dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \tag{48}$$

Für die Gleichungsform: f (x y) = o wird aus (47):

$$S = \int_\alpha^a \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \tag{49}$$

und daraus wieder, weil $\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}$ ist,

$$S = -\int_\beta^b \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \tag{50}$$

Ist endlich die Curve durch die beiden Gleichungen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, und ist weiter $\alpha = \varphi(\gamma)$, $a = \varphi(c)$, so geht (47) über in:

$$S = \int_{\gamma}^{c} dt \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \qquad (51)$$

61. Die Peripherie eines Kreises zu berechnen; $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.

$$S = \int_0^{2\pi} dt \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)\, r^2} = 2\, r\, \pi.$$

62. Die Länge eines Parabelbogens vom Scheitel bis zum Punkt $x\,y$ zu finden; $y^2 = 2\,p\,x$.

$$S = \int_0^y dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \lg \left[\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}\right]$$

63. Den Bogen einer Neil'schen Parabel zu finden, vom Anfangspunkt bis zum Punkt $x\,y$; $y^2 = a\,x^3$.

$$S = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{9\,a\,x}{4}} = \frac{8}{27\,a}\left[\left(1 + \frac{9\,a\,x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

64. Der Bogen einer Kettenlinie vom Anfangspunkt bis zum Punkt $x\,y$ soll berechnet werden; $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$.

$$S = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \sqrt{y^2 - m^2}$$

Der Bogen einer Kettenlinie, genommen vom Anfangspunkt bis zum Punkt $x\,y$, ist gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $= m$ und dessen Hypotenuse die Ordinate des Endpunktes ist.

65. Es soll die Länge der Cycloide gefunden werden $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

$$S = a \int_0^{2\pi} dt \sqrt{2\,(1 - \cos t)} = 2\,a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 8\,a.$$

66. Die Länge einer Epicycloide zu berechnen.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4\,(a + r)^2 \sin^2 \frac{r}{2\,a}\, t.$$

$$S = 2(a+r)\int_0^{\frac{2a\pi}{r}} \sin\frac{r}{2a}t\,dt = \frac{8a(a+r)}{r}$$

Setzt man $a = r$, so erhält man $16a$ als Länge der Cardioide.

67. Die Länge einer archimedischen Spirale zu finden; $r = a\,t$.

$$S = a\int_0^t \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{a}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \lg\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]$$

68. Den Umfang einer Ellipse zu berechnen; $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Ein Quadrant ist gleich

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}, \quad \text{wenn } \frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2 \text{ ist.}$$

$$S = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4\cos^4 t - \frac{1}{16}\varepsilon^6\cos^6 t - \ldots\right]dt$$

$$S = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3\varepsilon^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\varepsilon^6 - \ldots\right]$$

§. 7. Die Oberfläche von Rotationskörpern.

Wird eine Curve um ihre x-Achse gedreht, so erzeugt sie eine krumme Oberfläche. Ist die Ordinate eines sich drehenden Curvenelements $= y$, so ist das Differential der Oberfläche ein kleiner Cylindermantel, dessen Umfang $= 2y\pi$, und dessen Seite $= ds$, d. h. gleich dem Differential des Bogens ist. Hiernach ist das Differential der Oberfläche $dO = 2y\pi\,ds$, und

$$O = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (52)$$

69. Die Oberfläche einer Kugelhaube zu finden, wenn $y = \sqrt{2rx - x^2}$ die Scheitelgleichung des Erzeugungskreises und h die Höhe der Haube ist.

$$O = 2\pi \int_0^h dx \sqrt{2rx - x^2} \sqrt{1 + \frac{(r-x)^2}{2rx - x^2}} = 2r\pi h.$$

70. Die Mantelfläche eines Kegels zu berechnen.

Ist $y = kx$ die Gleichung der Graden, die durch Umdrehung den Kegelmantel erzeugt, und h die Höhe des Kegels, so ist:

$$O = 2k\pi\sqrt{1+k^2}\int_0^h x\,dx = k\pi h^2\sqrt{1+k^2}$$

Da $k = tg\,\alpha$, wenn α der Richtungswinkel der erzeugenden Graden, so ist $kh = r =$ Basishalbmesser, und $h\sqrt{1+k^2} = s =$ Länge der Erzeugungslinie. Durch Substitution dieser Werthe erhält man: $O = r\pi s$.

71. Es soll die Oberfläche des Körpers gefunden werden, der entsteht, wenn sich eine Cycloide um ihre x-Achse dreht. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$O = 2a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{64a^2\pi}{3}.$$

72. Die Oberfläche eines Paraboloides zu berechnen. Parabelgleichung: $y^2 = 2px$.

$$O = 2\pi\sqrt{p}\int_0^x dx\sqrt{p + 2x} = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(p+2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right]$$

73. Man soll die Oberfläche eines Ellipsoides berechnen, das entsteht, wenn sich eine Ellipse um eine ihrer Achsen dreht.

Ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ die Gleichung der Curve, so ist

$$\frac{1}{2}O = \frac{2b\pi}{a^2}\int_0^a dx\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}.$$

Wenn nun $a > b$ ist, so ist $a^2 - b^2 = e^2$, und

$$\frac{1}{2} O = \frac{2 b \pi}{a^2} \int_0^a dx \sqrt{a^4 - e^2 x^2}$$

$$\frac{1}{2} O = \frac{b \pi}{a^2} \left[x \sqrt{a^4 - e^2 x^2} + \frac{a^4}{e} \arcsin \frac{e x}{a^2} \right]_0^a$$

$$\frac{1}{2} O = b^2 \pi + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Ist aber $a < b$, so ist $a^2 - b^2 = - e^2$, und

$$\frac{1}{2} O = \frac{2 b \pi}{a^2} \int_0^a dx \sqrt{a^4 + e^2 x^2}$$

$$\frac{1}{2} O = \frac{b \pi}{a^2} \left[x \sqrt{a^4 + e^2 x^2} + \frac{a^4}{e} \lg (e^2 x + e \sqrt{a^4 + e^2 x^2}) \right]_0^a$$

$$\frac{1}{2} O = b^2 \pi + \frac{b a^2 \pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} \lg \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

§. 8. Der Cubikinhalt von Rotationskörpern.

Wird ein Körper dadurch erzeugt, dafs sich die zwischen einer Curve und der x-Achse gelegene Fläche um diese x-Achse dreht, so ist das Differential des Volumens $dV = y^2 \pi \, dx$, und des Volumen

$$V = \pi \int_\alpha^a y^2 \, dx.$$

74. Den Cubikinhalt einer Kugel zu berechnen.

$$V = 2 \pi \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

75. Den Cubikinhalt eines Rotationsellipsoides zu finden, das entsteht, wenn sich eine Ellipse um ihre grofse Achse dreht.

$$V = \frac{2 \pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx = \frac{4 a b^2 \pi}{3}$$

76. Der Inhalt eines parabolischen Zonenkörpers soll berechnet werden.

Sind x_1 und x_2 die Abscissen der Endpunkte des Parabelbogens, welcher die erzeugende Fläche begrenzt, so ist

$$V = 2 p \pi \int_{x_1}^{x_2} x \, dx = 2 p \pi \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_2 - x_1)$$

77. Man soll den Inhalt des Körpers finden, der entsteht, wenn sich die Cycloidenfläche um ihre x-Achse dreht.

$$V = a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \, dt = 8 a^3 \pi \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} = 5 a^3 \pi^2.$$

78. Ein Kreisabschnitt, dessen Sehne $= 2 s$ und dessen Halbmesser $= r$ ist, dreht sich um einen zur Sehne parallelen Durchmesser, wie grofs ist der Cubikinhalt des entstandenen Körpers?

$\frac{1}{2} V = \pi \int_0^s (r^2 - x^2) \, dx$ minus einem Cylinder $=$ $s \pi (r^2 - s^2)$. $V = \frac{4}{3} s^3 \pi$.

